TRANSACTIONS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 257, Number 1, January 1980

# $\sigma$-IDÉAUX ENGENDRÉS PAR DES ENSEMBLES FERMÉS ET THÉORÈMES D'APPROXIMATION

BY

ALAIN LOUVEAU

ABSTRACT. This paper is motivated by the study of $*$-games on $\omega$, and by a question of D. A. Martin on the strength of the hypothesis $AD_\omega^*$ that every $*$-game on $\omega$ is determined.

A general study of the $\sigma$-ideals of subsets of $\omega^\omega$ generated by closed sets encompasses the $*$-games and the "perfect set property".

Using associated games, we extend for these ideals many properties known for countable sets, under various hypotheses of determinacy. Our methods thus apply also to other examples of regularity properties, such as those introduced by A. S. Kechris.

Finally, a general theorem of approximation by analytic sets in Solovay's model is proved which, together with the preceding results, gives the solution of Martin's problem: $AD_\omega^*$ is true in Solovay's model.

Cet article est consacré à l'étude des liens existant entre certaines "bonnes" notions de petitesse pour les ensembles de réels et certains jeux infinis à information parfaite. De tels liens sont bien connus pour des notions classiques, comme la propriété de Baire ou la propriété de l'ensemble parfait. A. S. Kechris [6] a introduit une autre notion de petitesse, celle d'ensemble $K_\sigma$-borné ("$\sigma$-bounded set"), pour laquelle il est possible d'associer un jeu.

Notre travail est une généralisation de ce travail de Kechris, dans le but d'englober les jeux du type $G_\omega^*$. Nos méthodes permettent de démontrer la consistence relative de la détermination de tous les jeux du type $G_\omega^*$, ce qui répond à une question de D. A. Martin (cf. Théorème 4.4.)

Notre théorie pourrait être exposée dans le cas des jeux $G_\omega^*$, mais nous avons préféré donner des énoncés généraux, en partant de l'étude des notions de petitesse et non de l'étude des jeux, ce qui permet de donner d'autres applications, et d'isoler les notions importantes.

Parmi celles-ci, la plus importante est la notion de $\sigma$-idéal engendré par des ensembles fermés dans $\omega^\omega$. Toutes les notions classiques de petitesse n'entrent pas dans ce cadre: Par exemple, le $\sigma$-idéal des ensembles de mesure de Lebesgue nulle sur $\omega^\omega$, ou plus généralement de capacité nulle pour une capacité de Choquet, est engendré, en tant qu'idéal, par des $G_\delta$, mais n'est pas engendré, comme $\sigma$-idéal, par des fermés de $\omega^\omega$. Il en est de même pour le $\sigma$-idéal des ensembles complètement Ramsey-négligeables (pour une définition, cf. [7]).

Received by the editors January 20, 1977 and, in revised form, September 15, 1977.

*AMS (MOS) subject classifications* (1970). Primary 04A15, 02K30, 28A05, 02K05; Secondary 02F35, 54H05, 02K35.


0002-9947/80/0000-0007/$07.75

Cependant, comme nous le verrons, de nombreuses notions de petitesse entrent dans ce cadre. Le §1 est consacré à l'étude générale de ces $\sigma$-idéaux, et en particulier à établir la régularité des ensembles fermés pour les notions correspondantes d'approximation.

Dans le §2, nous introduisons la notion d'idéal paramétré, et démontrons, grâce à un lemme général de forcing, un théorème d'approximation dans le modèle de Lévy-Solovay: Tout ensemble est approximable de l'intérieur par un ensemble analytique ($\mathbf{\Sigma}_1^1$). Le théorème fournit de nouvelles démonstrations des résultats de Solovay [**13**] concernant la propriété de Baire et la propriété de l'ensemble parfait, et est la clef permettant de répondre à la question de D. Martin.

Le §3 est consacré à l'étude d'une propriété plus restrictive vérifiée par certains idéaux de fermés, qui permet d'associer à un tel idéal un jeu sur $\omega$ (les jeux $G_2^*$ et $G_\omega^*$ en sont des cas particuliers). Les méthodes de théorie des jeux, et principalement les techniques utilisées par Kechris (cf. [**4**] et [**5**]), permettent d'obtenir alors des théorèmes d'approximation pour les ensembles projectifs moyennant des hypothèses convenables, et des résultats effectifs comme l'existence d'un plus grand ensemble appartenant au $\sigma$-idéal et à une classe donnée de la hiérarchie effective.

Indépendament, Kechris [**6**, §6] a développé une autre théorie de jeux asymétriques liés aux idéaux de fermés (cf. la fin du §3). Les méthodes de Kechris et les nôtres donnent pour certains idéaux (notamment l'idéal des ensembles compacts) les mêmes résultats d'approximation pour les ensembles projectifs.

Enfin, dans le §4, nous rassemblons les résultats des sections précédentes pour établir les propriétés cherchées sur le $\sigma$-idéal associé aux jeux $G_\omega^*$. Nous analysons en détail plusieurs autres exemples, ce qui nous permet de montrer que l'analogie entre les différentes notions de petitesse introduites n'est pas complète: Pour certaines d'entre elles, l'assertion que le théorème d'approximation est vrai pour tous les ensembles $\mathbf{\Sigma}_2^1$ est une assertion équi-consistante avec l'existence d'un cardinal inaccessible, tandis que pour d'autres notions de petitesse, la même assertion est une conséquence de l'axiome de Martin $+2^{\aleph_0} > \aleph_1$.

**0. Notations et rappels.** Les notations utilisées ici sont les notations modernes telles qu'on peut les trouver par exemple dans le cours manuscrit de Kechris [**5**], ou le livre à paraître de Moschovakis [**10**]. Nous renvoyons également à ces deux ouvrages pour les principales notions introduites.

0.1. $\omega = \{0, 1, \dots\}$ est l'ensemble des entiers naturels, muni de la topologie discrète. Les lettres $k$, $l$, $m$, $n$ désigneront des entiers. L'espace de Baire $\omega^\omega$ des fonctions de $\omega$ dans $\omega$ est muni de la topologie produit. Ses éléments seront désignés par les lettres $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$.

Seq $\omega$ est l'ensemble des suites finies d'entiers, désignées par les lettres $s, t, u, \cdots \prec$ est l'ordre des sections commençantes sur Seq $\omega$, et $|s|$ désigne la longueur de la suite $s$. Enfin $^\frown$ désigne l'opération de concaténation des suites.

Si $s \in \operatorname{Seq} \omega$, on note $N_s = \{\alpha \in \omega^\omega s \prec \alpha\}$. La famille $(N_s)_{s \in \operatorname{Seq} \omega}$ engendre la topologie de $\omega^\omega$.

0.2. Nous serons principalement intéressés par les ensembles de la hiérarchie effective et de la hiérarchie projective. Nous renvoyons aux livres cités plus haut pour les définitions et les principales propriétés de ces classes. Les classes effectives seront notées $\Sigma_n^1$, $\Pi_n^1$, $\Delta_n^1$ ($\Sigma_n^1(\alpha)$, etc ..., pour les classes relativisées à $\alpha \in \omega^\omega$) et les classes projectives similairement $\boldsymbol{\Sigma}_n^1$, $\boldsymbol{\Pi}_n^1$, $\boldsymbol{\Delta}_n^1$. Nous utiliserons cependant le plus souvent la terminologie classique pour les premières classes projectives: ouverts au lieu de $\boldsymbol{\Sigma}_1^0$, fermés au lieu de $\boldsymbol{\Pi}_1^0$, boréliens au lieu de $\boldsymbol{\Delta}_1^1$ et analytiques au lieu de $\boldsymbol{\Sigma}_1^1$.

0.3. Soit $X$ un ensemble. Un arbre sur $X$ est un sous-ensemble de Seq $X$ clos par sous-suites (donc la suite vide est dans tout arbre non vide). Si $T$ est un arbre sur $X$, $[T] \subset X^\omega$ désigne l'ensemble des branches de $T$, c'est-à-dire l'ensemble des $f \in X^\omega$ tels que $\forall n\, f \restriction_n \in T$. Un arbre est dit bien fondé si $[T] = \varnothing$.

Soit $T$ un arbre sur $X_1 \times X_2$. Les éléments de $T$ peuvent être identifiés à des couples $(s, t)$, $s \in \operatorname{Seq} X_1$, $t \in \operatorname{Seq} X_2$, $|s| = |t|$, et les branches de $T$ à des couples $(f_1, f_2)$, $f_1 \in X_1^\omega$ et $f_2 \in X_2^\omega$. On note

$$p([T]) = \{f_1 \in X_1^\omega \exists f_2 \in X_2^\omega\, (f_1, f_2) \in [T]\}.$$

Si $f_1 \in X_1^\omega$, on note $T_{f_1} = \{t \in \operatorname{Seq} X_2 (f_1 \restriction_{|t|}, t) \in T\}$. $T_{f_1}$ est un arbre sur $X_2$ et $f_1 \in p([T]) \leftrightarrow T_{f_1}$ n'est pas bien fondé.

Si $T$ est un arbre sur $X$ et $s \in \operatorname{Seq} X$, on note $T_s = \{t \in \operatorname{Seq} X, s \frown t \in T\}$.

L'intérêt des arbres est qu'ils permettent de représenter certaines classes d'ensembles:

Nous utiliserons fréquemment dans la suite les résultats suivants (cf. **[5]**, **[10]**):

(i) Si $F$ est un fermé de $\omega^\omega$, soit $T_F$ l'arbre sur $\omega$ défini par $T_F = \{\alpha \restriction_n, \alpha \in F, n \in \omega\}$. Alors $[T_F] = F$.

(ii) Soit $A$ analytique, $A \subset \omega^\omega$. Il existe un arbre $T$ sur $\omega \times \omega$ tel que $A = p([T])$.

(iii) Soit $A$ un ensemble $\Sigma_2^1(\alpha)$, $A \subset \omega^\omega$. Il existe un arbre $T$ sur $\omega \times \aleph_1$, constructible en $\alpha$ tel que $A = p([T])$.

0.4. Une exposition de la théorie des jeux infinis à information parfaite peut-être trouvée dans **[1]**.

Nous rappellerons seulement quelques résultats:

Soit $X$ un ensemble, et $A \subset X^\omega$. Le jeu $G_X(A)$ est défini de la manière suivante:

Deux joueurs, I et II, jouent successivement des éléments de $X$. I joue $x_0$, II $x_1$, I $x_2$, etc. Le résultat du jeu est l'élément $f$ de $X^\omega$ défini par $f(n) = x_n$. I gagne si $f \in A$. Une stratégie $\sigma$ pour le joueur I est une application de Seq $X$ dans $X$: I joue selon $\sigma$ si lorsque II a joué $(x_1, \ldots, x_{2n-1})$, I répond par $x_{2n} = \sigma(x_1, \ldots, x_{2n-1})$. On définit de même une notion de stratégie pour le joueur II. Si I joue selon $\sigma$ et II selon $\tau$, on note $\sigma * \tau$ le jeu résultant. $\sigma$ est gagnante pour I si, pour toute $\tau$, $\sigma * \tau \in A$. Le jeu $G_X(A)$ est dit déterminé si l'un des joueurs a une stratégie gagnante.

Les résultats suivants concernant les jeux déterminés nous seront utiles.

(1) Les jeux $G_X(A)$, où $A$ est ouvert ou fermé dans $X^\omega$, sont déterminés (Gale Stewart).

(2) Les jeux $G_X(A)$, où $A$ est borélien dans $X^\omega$, sont déterminés (Martin).

(3) S'il existe un cardinal mesurable, les jeux $G_\omega(A)$, $A$ $\boldsymbol{\Sigma}^1_1$ dans $\omega^\omega$, sont déterminés (Martin).

Si $\mathcal{C}$ est une classe d'ensembles, nous noterons $\mathrm{Det}_X(\mathcal{C})$ l'assertion: "Tout jeu $G_X(A)$, $A \subset X^\omega$, $A \in \mathcal{C}$, est déterminé." Si $\mathcal{C} = V$, l'assertion sera notée $\mathrm{AD}_X$. Enfin si $X = \omega$, nous n'écrirons pas l'indice $\omega$ lorsqu'il n'y aura pas de confusion possible. Ainsi $\mathrm{Det}(\boldsymbol{\Sigma}^1_1)$ est l'assertion (3), A.D. est l'axiome de détermination habituel, et P.D. désignera l'assertion: tout jeu projectif sur $\omega$ est déterminé.

Nous utiliserons aussi les deux résultats suivants (que l'ont peut trouver dans [**5**]).

THÉORÈME (MOSCHOVAKIS). *Supposons* $\mathrm{Det}(\boldsymbol{\Delta}^1_{2n})$.
*Soit $A$ un ensemble $\Sigma^1_{2n}$, $A \subset \omega^\omega$. Si* I *a une stratégie gagnante dans le jeu $G(A)$, il a une stratégie gagnante $\Delta^1_{2n+1}$ (et de même pour* II *dans un jeu $\Pi^1_{2n}$).*

THÉORÈME (MARTIN). $\mathrm{Det}(\boldsymbol{\Delta}^1_{2n}) \rightarrow \mathrm{Det}(\boldsymbol{\Sigma}^1_{2n})$.

0.5. Les jeux $G^*$ sont définis de manière analogue aux jeux $G$: Si $X$ est un ensemble et $A \subset X^\omega$, $G^*_X(A)$ est défini de la manière suivante: I joue $s_0 \in \mathrm{Seq}\, X$, II joue $x_0 \in X$, I joue $s_1 \in \mathrm{Seq}\, X$, II $x_1 \in X$, etc. Si $f = s_0{}^\frown x_0{}^\frown s_1{}^\frown \ldots$ est le résultat du jeu, I gagne $G^*_X(A)$ si $f \in A$. On définit de manière analogue les notions de stratégies, stratégies gagnantes et jeux déterminés.

Les énoncés correspondant aux jeux $G^*$ seront notés avec un astérisque en indice. Dans [**1**], Morton Davis introduit les jeux $G^*$ et démontre le résultat suivant, qui est à la base de notre travail:

Soit $A \subset 2^\omega$. Le jeu $G^*_2(A)$ est déterminé si et seulement si $A$ est dénombrable ou contient un parfait.

C'est à des généralisations de ce résultat et à leurs conséquences que nous allons nous intéresser.

0.6. Les résultats de cet article sont démontrés dans ZF + DC la théorie de Zermelo-Frankael avec l'axiome des choix dépendants, DC: Si $R$ est une relation sur un ensemble $X$ et $\forall x \in X\ \exists y \in X (x, y) \in R$, alors $\exists f\, \forall n (f(n), f(n+1)) \in R$. Lorsque nous avons besoin d'une hypothèse supplémentaire, cette hypothèse est indiquée.

Les lettres A.C. désignent l'axiome du choix, C.H. l'hypothèse du continu ($2^{\aleph_0} = \aleph_1$), et pour un cardinal $\aleph$, M.A.($\aleph$) l'axiome de Martin pour les familles d'ensembles denses de cardinal $\aleph$.

## 1. Idéaux de fermés.

DÉFINITION 1.1. Soit $\mathfrak{T}$ une famille de fermés dans un espace polonais $P$. $\mathfrak{T}$ est dit *idéal de fermés* si $\mathfrak{T}$ est clos par sous-parties fermées, c'est-à-dire si pour tout $F$ élément de $\mathfrak{I}$ et tout fermé $F'$ contenu dans $F$, $F' \in \mathfrak{I}$. (Nous ne supposons pas $\mathfrak{I}$ clos par réunions finies. Nous nous intéresserons au $\sigma$-idéal engendré par $\mathfrak{I}$, donc ce sera sans importance.)

$\mathfrak{I}$ est dit *idéal propre* si d'une part tout fermé réduit à un point est élement de $\mathfrak{I}$, et d'autre part tout élément de $\mathfrak{I}$ est un fermé rare de $P$ (i.e. d'intérieur vide).

Dans la suite, les idéaux que nous considérerons seront presque toujours des idéaux propres. Comme nous le verrons, cette restriction ne diminue pas la généralité des résultats.

Des exemples classiques d'idéaux propres sont l'idéal $\mathfrak{I}_0$ des ensembles réduits à un point, et l'idéal $\mathfrak{I}_1$ des fermés rares. Ce sont les cas extrêmes, puisque dire que l'idéal $\mathfrak{I}$ est propre, c'est dire que $\mathfrak{I}_0 \subset \mathfrak{I} \subset \mathfrak{I}_1$.

A chaque idéal de fermés $\mathfrak{I}$, nous allons associer d'autres familles d'ensembles. La terminologie utilisée suit la terminologie qui est classique dans le cas de l'idéal $\mathfrak{I}_0$ (qui nous servira de référence pour tout ce travail).

DÉFINITION 1.2. Soit $\mathfrak{I}$ un idéal de fermés. $\mathfrak{I}_\sigma$ désignera le $\sigma$-idéal engendré par $\mathfrak{I}$: Un sous-ensemble $A$ de $P$ est élément de $\mathfrak{I}_\sigma$ s'il existe une suite $(F_n)_{n\in\omega}$ de fermés éléments de $\mathfrak{I}$, telle que $A \subset \bigcup_{n\in\omega} F_n$.

Soit $F$ un fermé non vide de $P$. $F$ est dit *$\mathfrak{I}$-parfait* si aucun point de $F$ n'a de voisinage (dans $F$) élément de $\mathfrak{I}$, c'est-à-dire si pour tout ouvert $O$ de $P$, si $O \cap F \neq \varnothing$, alors $\overline{O} \cap F \notin \mathfrak{I}$ ($\overline{O}$ désigne l'adhérence de $O$ dans $P$).

Soit $\mathfrak{I}$ un idéal propre de fermés de $P$, et $F_0$ un fermé de $P$. Définissons $\mathfrak{I}_{F_0} = \{F \cap F_0,\ F \in \mathfrak{I}\} = \{F \subset F_0,\ F \in \mathfrak{I}\}$. L'idéal $\mathfrak{I}_{F_0}$ est un idéal de fermés de $F_0$, et on voit facilement que $F_0$ est un fermé $\mathfrak{I}$-parfait si et seulement si $\mathfrak{I}_{F_0}$ est propre.

Le théorème qui suit est l'analogue d'un résultat classique dans le cas de l'idéal $\mathfrak{I}_0$:

THÉORÈME 1.3. *Soit $\mathfrak{I}$ un idéal de fermés de $P$, et $F$ un fermé de $P$. Il existe une partition unique de $F$ en deux ensembles $F'$ et $A$, tels que*

(i) *$A$ est élément de $\mathfrak{I}_\sigma$.*

(ii) *$F'$ est un fermé $\mathfrak{I}$-parfait, ou vide.*

DÉMONSTRATION. Il est possible d'utiliser, pour démontrer ce résultat, une technique de dérivation à la Cantor, inspirée du cas $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_0$. Nous utiliserons une autre méthode en remarquant tout d'abord le fait suivant: Soit $O$ un ouvert, tel que $F \cap O$ soit non vide et dans $\mathfrak{I}_\sigma$. Il existe alors un ouvert $O' \subset O$ tel que $F \cap O' \neq \varnothing$ et $F \cap \overline{O'} \in \mathfrak{I}$.

En effet $F \cap O$ est un $G_\delta$ de $P$, donc vérifie le théorème de Baire. Par hypothèse, $F \cap O$ est recouvert par une suite $(F_n)_{n\in\omega}$ d'éléments de $\mathfrak{I}$. Donc $F \cap O = \bigcup_{n\in\omega} F \cap O \cap F_n$, et d'après le théorème de Baire, l'un des $F \cap O \cap F_n$ est d'intérieur non vide dans $F \cap O$. D'où le résultat.

Par suite, un fermé $F$ non vide est $\mathfrak{I}$-parfait si aucun point de $F$ n'a de voisinage élément de $\mathfrak{I}_\sigma$.

Soit alors $\mathfrak{O}$ l'ensemble des ouverts $O$ de $P$ tels que $O \cap F \in \mathfrak{I}_\sigma$, et

$O_0 = U\mathcal{O}$. Comme $O_0$ est union dénombrable d'éléments de $\mathcal{O}$, $O_0 \in \mathfrak{I}_\sigma$. On pose alors $A = O_0 \cap F$ et $F' = F - O_0$. Comme $A = O_0 \cap F$, $A \in \mathfrak{I}_\sigma$. Soit $O$ tel que $O \cap F' \in \mathfrak{I}_\sigma$. Alors $F \cap O \subset (F' \cap O) \cup A$ est élément de $\mathfrak{I}_\sigma$, donc $O \in \mathcal{O}$, et par suite $O \subset O_0$; donc $O \cap F' = \varnothing$. Ceci montre que $F'$ est vide ou $\mathfrak{I}$-parfait.

Il reste à vérifier l'unicité. Si $(F_1', A_1)$ est une autre partition satisfaisant les conditions (i) et (ii), il existe un ouvert $O_1$ tel que $O_1 \cap F = A_1$. Par suite $O_1 \in \mathcal{O}$, donc $A_1 \subset A$. D'autre part $F_1' \cap O_0 \subset A$ est élément de $\mathfrak{I}_\sigma$, et donc vide puisque $F_1'$ est $\mathfrak{I}$-parfait. Donc $F_1' \subset F_1$. Ceci prouve que $F_1' = F_1$ et $A_1 = A$. $\square$

Pour bien voir l'intérêt de ce théorème, nous allons introduire la définition suivante:

DÉFINITION 1.4. Soit $\mathfrak{I}$ un idéal de fermés de $P$, et $A \subset P$. $A$ est dit $\mathfrak{I}$-*régulier* si $A \in \mathfrak{I}_\sigma$ ou si $A$ contient un fermé $\mathfrak{I}$-parfait.

Cette terminologie n'est pas classique. Il faut cependant noter que dans la cas de l'idéal $\mathfrak{I}_0$, la $\mathfrak{I}_0$-régularité d'un ensemble $A$ correspond à: "$A$ est dénombrable ou contient un parfait", qui est bien la notion de régularité étudiée.

Du théorème précédent, on peut, en utilisant cette terminologie, déduire immédiatement le corollaire suivant:

COROLLAIRE 1.5. (i) *Tout fermé de $P$ est $\mathfrak{I}$-régulier.*

(ii) *La notion de $\mathfrak{I}$-régularité est une notion d'approximation par l'intérieur: Un ensemble $A$ qui n'est pas dans $\mathfrak{I}_\sigma$ est $\mathfrak{I}$-régulier si et seulement si il contient un fermé que n'est pas dans $\mathfrak{I}_\sigma$.*

REMARQUE. Dans la suite, nous allons nous intéresser à cette notion de $\mathfrak{I}$-régularité, pour des idéaux $\mathfrak{I}$ variés. Cependant cette notion ne correspond pas toujours, dans les cas classiques, avec la notion de régularité étudiée. C'est en particulier le cas de la propriété de Baire: Soit $\mathfrak{I}_1$ l'idéal des fermés rares. $(\mathfrak{I}_1)_\sigma$ est le $\sigma$-idéal des ensembles maigres, et un fermé $F$ non vide est $\mathfrak{I}_1$-parfait s'il n'est maigre en aucun de ses points, c'est-à-dire si c'est un bon fermé: $\overline{(\mathrm{Int}\, F)} = F$. Par suite la propriété de $\mathfrak{I}_1$-régularité n'a rien à voir avec la propriété de Baire: Par exemple il est facile de construire, dans $\omega^\omega$, un $G_\delta$ non maigre ne contenant aucun bon fermé. Donc il est faux en général que tout $G_\delta$ soit $\mathfrak{I}_1$-régulier.

Nous nous restreindrons dans la suite aux idéaux propres de fermés sur $\omega^\omega$. Nous allons terminer cette section en montrant comment les résultats peuvent se généraliser.

PROPOSITION 1.6. *Soit $\mathfrak{I}$ un idéal propre de fermés d'un $G_\delta$ $A$ de $\omega^\omega$, et soit $\mathbf{\mathfrak{I}} = \{\overline{F}, F \in \mathfrak{I}\} \cup \mathfrak{I}_0$. Alors $\mathbf{\mathfrak{I}}$ est un idéal propre de fermés de $\omega^\omega$, $\mathbf{\mathfrak{I}}_A = \{F \cap A, F \in \mathbf{\mathfrak{I}}\}$ est l'idéal $\mathfrak{I}$, et si $B$ est un sous-ensemble de $A$, alors*

(i) *$B \in \mathfrak{I}_\sigma \leftrightarrow B \in \mathbf{\mathfrak{I}}_\sigma$.*

(ii) *Si $B$ est fermé dans $A$, $B$ $\mathfrak{I}$-parfait $\leftrightarrow$ $\overline{B}$ $\mathbf{\mathfrak{I}}$-parfait.*

(iii) *$B$ $\mathbf{\mathfrak{I}}$-régulier $\rightarrow$ $B$ est $\mathfrak{I}$-régulier.*

DÉMONSTRATION. $\mathfrak{I}$ est clairement un idéal propre. Si $F$ est fermé relativement à $A$, alors $\bar{F} \cap A = F$. Par suite $\mathcal{I} = \{F \cap A, F \in \mathfrak{I}\}$,

(i) Si $B \subset A$,

$$
\begin{aligned}
B \in \mathcal{I}_\sigma &\leftrightarrow \exists (F_n)_{n \in \omega}, F_n \in \mathcal{I}, \text{ tel que } B \subset UF_n \\
&\leftrightarrow \exists (F'_n)_{n \in \omega}, F'_n \in \mathfrak{I}, \text{ tel que } B \subset UF'_n \\
&\leftrightarrow B \in \mathfrak{I}_\sigma.
\end{aligned}
$$

(ii) Si de plus $B$ est fermé dans $A$, $B \neq \varnothing$

$$
\begin{aligned}
B \text{ n'est pas } \mathcal{I}\text{-parfait} &\leftrightarrow \exists O \text{ ouvert fermé de } \omega^\omega \text{ tel que } O \cap B \neq \varnothing \\
&\quad\; \text{et } O \cap B \in \mathcal{I} \\
&\leftrightarrow \exists O \text{ ouvert fermé de } \omega^\omega \text{ tel que } O \cap \bar{B} \neq \varnothing \\
&\quad\; \text{et } O \cap \bar{B} \in \mathfrak{I} \\
&\leftrightarrow B \text{ n'est pas } \mathfrak{I}\text{-parfait.}
\end{aligned}
$$

(iii) Soit $B$ un ensemble $\mathfrak{I}$-régulier. Si $B \notin \mathcal{I}_\sigma$, $B \notin \mathfrak{I}_\sigma$ d'après (i) donc contient un fermé $F$ de $\omega^\omega$ $\mathfrak{I}$-parfait. Mais comme $F \subset A$, $F$ est $\mathcal{I}$-parfait d'après (ii). Donc $B$ est $\mathcal{I}$-régulier. □

Le résultat (iii) montre comment les résultats de régularité pour des idéaux propres de $\omega^\omega$ peuvent s'étendre en résultats de régularité pour des idéaux propres de sous-ensembles $G_\delta$ de $\omega^\omega$.

Nous allons maintenant voir comment éliminer l'hypothèse $\mathcal{I}$ propre. Tout d'abord si $\mathcal{I}$ est quelconque, soit $A = \{\alpha \in \omega^\omega, \{\alpha\} \in \mathcal{I}\}$, et soit $\mathcal{I}' = \mathcal{I} \cup \mathcal{I}_0$. Clairement un ensemble $B$ est $\mathcal{I}$-régulier si et seulement si $B \cap A^c \neq \varnothing$, ou $B \subset A$ et $B$ est $\mathcal{I}'$-régulier. Nous pouvons donc supposer $\mathcal{I}_0 \subset \mathcal{I}$. La proposition qui suit montre que l'on peut se ramener au cas des idéaux propres:

PROPOSITION 1.7. *Soit $\mathcal{I}$ un idéal de fermés de $\omega^\omega$, $\mathcal{I}_0 \subset \mathcal{I}$. Si $\omega^\omega \notin \mathcal{I}_\sigma$, il existe un fermé $\mathcal{I}$-parfait $P$ et un idéal propre $\mathfrak{I}$ de fermés de $\omega^\omega$, canoniquement associés à $\mathcal{I}$, tels que pour tout $A \subset \omega^\omega$, $A$ est $\mathcal{I}$-régulier si et seulement si $A \cap P$ est $\mathfrak{I}$-régulier.*

DÉMONSTRATION. D'après le Théorème 1.3 appliqué à $\omega^\omega$, si $\omega^\omega \notin \mathcal{I}_\sigma$, alors il contient un plus grand fermé $\mathcal{I}$-parfait $P$. L'idéal $\mathcal{I}_P$ est un idéal propre de fermés de $P$. Soit $\mathfrak{I}$ l'idéal propre sur $\omega^\omega$ canoniquement associé à $\mathcal{I}_P$ par la Proposition 1.6. Montrons que $P$ et $\mathfrak{I}$ conviennent:

Comme $\mathfrak{I} \subset \mathcal{I}$, $\mathfrak{I}_\sigma \subset \mathcal{I}_\sigma$ donc tout fermé $\mathcal{I}$-parfait est $\mathfrak{I}$-parfait.

Soit $A$ $\mathcal{I}$-régulier, et supposons $A \cap P \notin \mathfrak{I}_\sigma$. D'après 1.6(i), $A \cap P \notin (\mathcal{I}_P)_\sigma$, donc $A \cap P \notin \mathcal{I}_\sigma$. Donc $A \notin \mathcal{I}_\sigma$, et d'après l'hypothèse $A$ contient un fermé $\mathcal{I}$-parfait $F$. Mais d'après le choix de $P$, $F \subset A \cap P$, et $F$ est $\mathfrak{I}$-parfait. Donc $A$ $\mathcal{I}$-régulier $\rightarrow A \cap P$ $\mathfrak{I}$-régulier. Réciproquement, supposons $A \cap P$ $\mathfrak{I}$-régulier, et $A \notin \mathcal{I}_\sigma$. Alors $A \cap P \notin \mathfrak{I}_\sigma$ (car sinon $A \cap P$ serait dans $\mathcal{I}_\sigma$, et $A \subset (A \cap P) \cup \omega^\omega - P$ aussi). Par suite $A \cap P$ contient un fermé $\mathfrak{I}$-parfait $F$.

D'après 1.6(ii), $F$ est $\mathcal{I}_P$-parfait, et comme $F \subset P$, $F$ est $\mathcal{I}$-parfait. □

D'après cette proposition, des résultats de régularité obtenus pour des idéaux propres s'étendent, pour de larges classes d'ensembles–par exemple pour les classes projectives de Lusin, en fait pour toutes les classes étudiées ici–aux idéaux de fermés quelconques. Nous poursuivrons l'étude de ces extensions dans le §3, lorsque nous établirons les théorèmes de $\mathcal{T}$-régularité (qui, d'après la remarque suivant la Proposition 1.5, nécessitent des hypothèses supplémentaires sur les idéaux considérés).

Auparavant nous allons nous intéresser, dans le §2, à un résultat général sur les idéaux de fermés, qui permet d'approximer par l'intérieur dans le modèle de Lévy-Solovay, tout ensemble par un ensemble analytique (ce qui peut être traduit, de la manière habituelle, en résultats de consistance relative à la théorie ZF + "Il existe un cardinal inaccessible").

**2. Un théorème d'approximation dans le modèle de Lévy-Solovay.** Pour une description précise du modèle de Lévy-Solovay, nous renvoyons à l'article de R. M. Solovay [**13**], dont nous suivrons la terminologie et les notations dans cette section, et dont nous utiliserons les principaux résultats.

Rappelons brièvement que si $\mathfrak{M}$ est un modèle de ZF + AC + "Il existe un cardinal $\Omega$ fortement inaccessible", alors le modèle de Lévy-Solovay au-dessus de $\mathfrak{M}$ est obtenu de la manière suivante: $\mathfrak{N}$ est le modèle de ZF + AC obtenu en ajoutant génériquement à $\mathfrak{M}$ une famille $(f_\lambda)_{\lambda<\Omega}$ de fonctions $f_\lambda\colon \omega \to \lambda$ collapsant $\lambda$ sur $\omega$.

Si $\mathfrak{N}_1$ est dans $\mathfrak{N}$ la classe des ensembles héréditairement définissables en termes d'une suite d'ordinaux et d'éléments de $\mathfrak{M}$, alors $\mathfrak{N}_1$ est le modèle de Lévy-Solovay associé à $\mathfrak{M}$, et il est démontré dans [**13**] que $\mathfrak{N}_1$ est un modèle de ZF + DC qui satisfait de plus [**13**, Théorème 1]: "Tout ensemble de $\omega^\omega$ est Lebesgue mesurable, a la propriété de Baire, et est dénombrable ou contient un parfait (i.e. est $\mathcal{T}_0$-régulier)".

La démonstration de ce résultat passe par un résultat analogue concernant le modèle $\mathfrak{N}$ (qui satisfait l'axiome du choix): Dans $\mathfrak{N}$, tout sous-ensemble de $\omega^\omega$ $\mathfrak{M}$-définissable en termes d'un réel est Lebesgue-mesurable, a la propriété de Baire et est $\mathcal{T}_0$-régulier [**13**, Théorème 2]. Dans le cours de la démonstration de la $\mathcal{T}_0$-régularité, Solovay utilise le lemme général de forcing suivant [**13**, Lemme I.2.5]: Soit $\mathfrak{M}$ un modèle transitif de ZF, $C_1$ et $C_2$ deux ensembles de conditions de forcing dans $\mathfrak{M}$, $G_1$ $\mathfrak{M}$-générique pour $C_1$ et $G_2$ $\mathfrak{M}[G_1]$-générique pour $C_2$. Si $\alpha \in \omega^\omega$, et $\alpha \in \mathfrak{M}[G_1] \cap \mathfrak{M}[G_2]$, alors $\alpha \in \mathfrak{M}$.

Dans cette section, nous allons démontrer une généralisation de ce lemme de forcing, ce qui donnera en retour le théorème d'approximation annoncé dans le modèle $\mathfrak{N}_1$.

DÉFINITION 2.1. Soit $\mathcal{T}$ un idéal de fermés de $\omega^\omega$. $\mathcal{T}$ est dit *paramétré* s'il existe une famille $\Phi = \{F_\beta, \beta \in A\}$ d'éléments de $\mathcal{T}$ telle que

(i) $\Phi$ est une base de $\mathcal{T}$, c'est-à-dire $\forall F \in \mathcal{T}, \exists \beta \in A\ F \subset F_\beta$.

(ii) La relation (en $\alpha$ et $\beta$) $\Phi(\alpha, \beta) \leftrightarrow \beta \in A \wedge \alpha \in F_\beta$ est $\mathbf{\Pi}^0_1$.

(Nous identifions ici la famille $\Phi$, le prédicat à deux variables et le fermé de $\omega^\omega \times \omega^\omega$ correspondants.)

Si $\mathfrak{T}$ est paramétré et $\Phi$ est $\Pi_1^0(\alpha_0)$, nous appelons $\alpha_0 \in \omega^\omega$ un paramètre pour $\mathfrak{T}$.

Le résultat principal de cette section est le théorème suivant:

THÉORÈME 2.2. *Soit $\mathfrak{T}$ un idéal paramétré de fermés de $\omega^\omega$ dans le modèle $\mathfrak{N}$. Le modèle $\mathfrak{N}$ satisfait l'assertion suivante: Pour tout ensemble $A$ contenu dans $\omega^\omega$, $\mathfrak{M}$-définissable en terme d'un réel, qui n'est pas élément de $\mathfrak{T}_\sigma$, il existe un sous-ensemble $\mathbf{\Sigma}_1^1$ $B$ de $A$ qui n'est pas élément de $\mathfrak{T}_\sigma$.*

*Par suite, dans le modèle $\mathfrak{N}_1$, tout sous ensemble $A$ de $\omega^\omega$ qui n'est pas dans $\mathfrak{T}_\sigma$ contient un analytique non dans $\mathfrak{T}_\sigma$.*

Remarquons que dans le cas de l'idéal $\mathfrak{T}_0$ (qui est clairement paramétré avec comme relation $\Phi$ l'égalité), le théorème précédent, associé au résultat classique de Sierpinski (tout analytique non dénombrable contient un parfait), donne en particulier une démonstration du résultat de Solovay sur la $\mathfrak{T}_0$-régularité des ensembles dans le modèle $\mathfrak{N}_1$. Nous verrons plus loin d'autres exemples d'application.

Nous allons d'abord établir le lemme de forcing annoncé:

LEMME 2.3. *Soit $\mathfrak{M}$ un modèle transitif de ZF, $\Phi \subset \omega^\omega \times \omega^\omega$ une relation $\Pi_1^0(\alpha_0)$ dans $\mathfrak{M}$, $C_1$ et $C_2$ deux ensembles ordonnés de $\mathfrak{M}$, $G_1$ $\mathfrak{M}$-générique pour $C_1$, et $G_2$ $\mathfrak{M}[G_1]$-générique pour $C_2$.*

*Soit $\alpha \in \omega^\omega \cap \mathfrak{M}[G_1]$, $\beta \in \omega^\omega \cap \mathfrak{M}[G_2]$ tels que $\mathfrak{M}[G_1 \times G_2] \models \Phi(\alpha, \beta)$. Il existe alors $\gamma \in \omega^\omega \cap \mathfrak{M}$ tel que $\mathfrak{M}[G_1 \times G_2] \models \Phi(\alpha, \gamma)$.*

DÉMONSTRATION. Nous allons utiliser le lemme classique suivant (cf. [**13**, Lemme I.2.4]): Soient $C_1$ et $C_2$ les deux ensembles ordonnés de $\mathfrak{M}$, $C = C_1 \times C_2$, et soit $p \in C$, $p = \langle p_1, p_2\rangle$ et $\varphi$ tels que $\langle p_1, p_2\rangle \Vdash$ "$\mathfrak{M}[G_1] \models \varphi$" ($\Vdash$ est le forcing faible correspondant à $C$). Alors pour tout $q \in C_2$, $\langle p_1, q\rangle \Vdash$ "$\mathfrak{M}[G_1] \models \varphi$".

Revenons à la démonstration du lemme. $\Phi$ étant $\Pi_1^0(\alpha_0)$, il existe un prédicat récursif $\Phi'$ tel que $\Phi(\alpha, \beta) \Leftrightarrow \forall n \Phi'(\bar{\alpha}(n), \bar{\beta}(n), \bar{\alpha}_0(n))$. Soit $p = \langle p_0, q_0\rangle$ un élément de $G_1 \times G_2$ tel que

$$p \Vdash \text{“}\alpha \in \mathfrak{M}[G_1] \cap \omega^\omega\text{”} \wedge \text{“}\beta \in \mathfrak{M}[G_2] \cap \omega^\omega\text{”} \wedge \Phi(\underline{\alpha}, \underline{\beta}).$$

Posons $A = \{s \in \operatorname{Seq} \omega,\ \exists q \in C_2,\ q \leqslant q_0,\ \langle p_0, q\rangle \Vdash \hat{s} = \underline{\beta} \restriction_{|\hat{s}|}\}$. $A \in \mathfrak{M}$, et $A$ est clairement un arbre sur $\omega$. Pour chaque $s \in A$, il existe $k \in \omega$ tel que $s^\frown k \in A$: En effet il existe par hypothèse $q$ tel que $\langle p_0, q\rangle \Vdash \underline{\beta} \restriction_{|\hat{s}|} = \hat{s}$. Comme $\langle p_0, q\rangle \Vdash \underline{\beta} \in \omega^\omega$, $\langle p_0, q\rangle \Vdash \exists k(\underline{\beta}(|\hat{s}|) = \hat{k})$. Soient alors $k$, et $\langle p_1, q_1\rangle < \langle p_0, q\rangle$ tels que $\langle p_1, q_1\rangle \Vdash \underline{\beta}(|\hat{s}|) = \hat{k}$. Par absoluïté $\langle p_1, q_1\rangle \Vdash$ "$\mathfrak{M}[G_2] \models \beta(|s|) = k$", donc $\langle p_0, q_1\rangle \Vdash$ "$\mathfrak{M}[G_2] \models \beta(|s|) = k$", donc $\langle p_0, q_1\rangle \Vdash \underline{\beta}(|\hat{s}|) = \hat{k}$ et $s^\frown k \in A$.

Par suite, comme $\varnothing \in A$, il existe $\gamma \in [A] \cap \mathfrak{M}$. Nous allons montrer que $\gamma$ convient, c'est-à-dire que $\mathfrak{M}[G_1 \times G_2] \models \Phi(\alpha, \gamma)$. Puisque $\langle p_0, q_0\rangle \in G_1 \times G_2$, il suffit de prouver que pour tout $n$, $\langle p_0, q_0\rangle \Vdash \Phi'(\underline{\bar{\alpha}}(\hat{n}), \widehat{\bar{\gamma}(\hat{n})}, \widehat{\bar{\alpha}_0(n)})$.

Soit $s = \gamma|_n$. $s \in A$, donc il existe $q \leqslant q_0, \langle p_0, q\rangle \Vdash \underline{\beta} \restriction_{\hat{n}} = \hat{s}$.

Par suite $\langle p_0, q\rangle \Vdash \Phi'(\underline{\bar{\alpha}}(\hat{n}), \widehat{\bar{\gamma}(n)}, \widehat{\bar{\alpha}_0(n)})$. Par absoluïté et en utilisant de nouveau le lemme précédent, on en déduit que

$$\langle p_0, q_0\rangle \Vdash \Phi'\big(\underline{\alpha}(\hat{n}), \widehat{\gamma(n)}, \widehat{\bar{\alpha}_0(n)}\big).$$

2.4. *Démonstration du Théorème* 2.2. Par la technique utilisée par Solovay, il suffit de démontrer le théorème pour un ensemble $\mathfrak{M}$-définissable $A$, et un idéal de fermés $\mathfrak{T}$ avec paramètre $\alpha_0 \in \mathfrak{M}$, en augmentant si nécessaire $\mathfrak{M}$ en $\mathfrak{M}[\alpha_0']$, avec un élément $\alpha_0'$ de $\omega^\omega \cap \mathfrak{N}$ qui code le paramètre de $A$ et $\alpha_0$.

Supposons que $A$ n'appartient pas à $\mathfrak{T}_\sigma$. Alors certainement $A \not\subset \bigcup_{\beta\in\omega^\omega\cap\mathfrak{M}} F_\beta$, puisque $\omega^\omega \cap \mathfrak{M}$ est dénombrable dans $\mathfrak{N}$. Soit $\alpha_1$ un élément de $A \dot{-} (\bigcup_{\beta\in\mathfrak{M}} F_\beta)$ et $\xi$ un ordinal dénombrable de $\mathfrak{N}$ (que l'on peut supposer $\geqslant \omega$) tel que $\alpha_1 \in \mathfrak{M}[F_0]$, où $F_0$ est dans $\mathfrak{N}$ une fonction de $\omega$ dans $\xi$, $\mathfrak{M}$-générique pour le forcing $P_\xi$ qui détruit $\xi$. Il existe donc une formule $\psi(v_0, v_1, v_2, v_3)$ et un élément $\underline{\alpha}$ de $\mathfrak{M}$ tels que

$$\alpha_1(m) = n \leftrightarrow \mathfrak{M}[F_0] \vDash \psi(\underline{\alpha}, F_0, m, n).$$

En utilisant le lemme de vérité, on en déduit qu'il existe $f_0 \in P_\xi$ tel que si $F$ est dans $\mathfrak{N}$ une fonction de $\omega$ dans $\xi$, $\mathfrak{M}$-générique pour $P_\xi$, et si $f_0 \subset F$, alors, en définissant $\alpha = \varphi(F)$ par $\alpha(m) = n \leftrightarrow \mathfrak{M}[F] \vDash \psi(\underline{\alpha}, F, m, n)$, $\alpha$ est un élément de $\omega^\omega$, $\alpha \in A$, et $\alpha \notin \bigcup_{\beta\in\omega^\omega\cap\mathfrak{M}} F_\beta$.

Posons $B = \{\varphi(F),\ F \in \mathfrak{N},\ F\colon \omega \to \xi$ est $\mathfrak{M}$-générique pour $P_\xi$, et $f_0 \subset F\}$. D'après ce qui précède, $B \subset A$. Nous allons prouver que $B$ est $\mathbf{\Sigma}_1^1$, et $B \notin \mathfrak{T}_\sigma$. Soit $X = \{F \in \mathfrak{N},\ F\colon \omega \to \xi$ est $\mathfrak{M}$-générique pour $P_\xi$, et $f_0 \subset F\}$. $X$ est un sous-ensemble de $\xi^\omega$ et si on munit $\xi^\omega$ de la topologie produit de la topologie discrète sur $\xi$, l'application $\varphi\colon X \to \omega^\omega$ est clairement continue (par le lemme de vérité). D'autre part

$$X = \{F \in \xi^\omega, f_0 \subset F\} \cap \bigcap_{n\in\omega} \bigcup_{s} \{F, F|_s \in X_n\},$$

où $s$ varie dans les sous-ensembles finis de $\xi$, et $(X_n)_{n\in\omega}$ est dans $\mathfrak{N}$ une énumération des sous-ensembles de $P_\xi$ qui sont dans $\mathfrak{M}$ et denses (cet ensemble est dénombrable dans $\mathfrak{N}$). Par suite $X$ est un $G_\delta$ de $\xi^\omega$, et $B = \varphi(X)$ est $\mathbf{\Sigma}_1^1$.

Il reste à prouver que $B \notin \mathfrak{T}_\sigma$. Supposons le contraire, et soit $(\beta_n)_{n\in\omega}$ une suite d'éléments de $\omega^\omega$ telle que $B \subset \bigcup_{n\in\omega} F_{\beta_n}$. La suite $(\beta_n)_{n\in\omega}$ est élément d'un modèle $\mathfrak{M}[F_{\xi'}]$, $\xi' < \Omega$.

Soit alors $F \in X$, $F$ $\mathfrak{M}[F_{\xi'}]$-générique pour $P_\xi$ (un tel $F$ existe dans $\mathfrak{N}$), et $\alpha = \varphi(F)$.

Puisque $\alpha \in B$, il existe un $n$ tel que $\Phi(\alpha, \beta_n)$. On peut alors appliquer le Lemme 2.3: $\alpha \in \mathfrak{M}[F]$, $\beta_n \in \mathfrak{M}[F_{\xi'}]$, et $\mathfrak{M}[F_{\xi'} \times F] \vDash \Phi(\alpha, \beta_n)$. Donc il existe $\gamma \in \mathfrak{M}$ tel que $\mathfrak{M}[F_{\xi'} \times F] \vDash \Phi(\alpha, \gamma)$. Par absoluïté, $\mathfrak{N} \vDash \alpha \in F_\gamma$. Mais ceci contredit la définition de $f_0$. $\square$

Il est clair, à partir de ce résultat, que pour obtenir un théorème de $\mathfrak{T}$-régularité pour les ensembles $\mathfrak{M}$-définissables en terme d'un réel dans $\mathfrak{N}$, pour tous les sous-ensembles de $\omega^\omega$ dans $\mathfrak{N}_1$, il suffit de connaître le résultat pour les ensembles analytiques. C'est de cette façon que nous appliquerons ce résultat, après avoir démontré, dans le §3, la $\mathfrak{T}$-régularité des ensembles analytiques pour une classe spéciale d'idéaux de fermés.

Il est à noter cependant que le Théorème 2.2 est beaucoup plus général et peut permettre de démontrer des résultats d'approximation très différents de la $\mathcal{T}$-régularité. Nous allons donner un exemple d'une telle utilisation du Théorème 2.2, en démontrant un autre résultat de Solovay [**13**, Théorème 1]: Dans $\mathfrak{N}_1$, tout sous ensemble de $\omega^\omega$ a la propriété de Baire. Cette démonstration n'est pas plus simple que celle de Solovay, mais très différente: la démonstration de Solovay repose sur le fait que l'algèbre de Boole des boréliens modulo les ensembles maigres est complète.

PROPOSITION 2.5. *L'idéal $\mathcal{T}_1$, des fermés rares de $\omega^\omega$ est un idéal paramétré.*

DÉMONSTRATION. Soit $n \mapsto O_n$ une énumération des ouverts fermés non vides de $\omega^\omega$, telle que la relation (en $m$ et $n$) $O_m \subset O_n$, et la relation (en $\alpha$ et $n$) $\alpha \in O_n$ soient récursives. Soit $\Phi$ la relation

$$\Phi(\alpha, \beta) \leftrightarrow \forall n(\alpha \in O_{\beta(n)} \wedge O_n \not\subset O_{\beta(n)}).$$

$\Phi$ est $\Pi^0_1$, et pour tout $\beta$, $F_\beta = \{\alpha, \Phi(\alpha, \beta)\} = \bigcap_{n \in \omega} O_{\beta(n)}$ si $\forall n\ O_n \not\subset O_{\beta(n)}$, $F_\beta = \varnothing$ sinon. Par suite clairement les $F_\beta$ sont rares. Il existe alors $\beta$ tel que $F = \bigcap_{n \in \omega} O_{\beta(n)}$, et on peut supposer que, si $m < n$, $O_{\beta(m)} \supset O_{\beta(n)}$. Soit $\beta'$: $\omega \to \omega$ définie par $\beta'(n) = \inf\{m \geqslant n,\ O_n \not\subset O_{\beta(n)}\}$. $\beta'$ est définie car $F$ est rare. Enfin si on pose $\beta'' = \beta \circ \beta'$, alors $\forall n\ O_n \not\subset O_{\beta''(n)}$, et $F = \bigcap_{n \in \omega} O_{\beta''(n)}$, donc $F = F_{\beta''}$. Ceci prouve que $\Phi$ paramétrise l'idéal $\mathcal{T}_1$. □

COROLLAIRE 2.6. *Dans le modèle $\mathfrak{N}$, tout sous-ensemble $A$ de $\omega^\omega$, définissable en terme d'un réel et non maigre contient un analytique non maigre.*

De ce corollaire, une technique classique permet de déduire le résultat de Solovay:

COROLLAIRE 2.7. ([**13**, THÉORÈMES 1 ET 2]). *Dans le modèle $\mathfrak{N}$, tout sous-ensemble de $\omega^\omega$ $\mathfrak{M}$-définissable en terme d'un réel a la propriété de Baire. Par suite dans le modèle $\mathfrak{N}_1$, tout sous-ensemble de $\omega^\omega$ a la propriété de Baire.*

DÉMONSTRATION. Soit $A \subset \omega^\omega$, $A$ $\mathfrak{M}$-définissable en terme d'un réel. Soit $\mathcal{O}$ l'ensemble des ouverts $O$ de $\omega^\omega$ tels que $O \cap A$ soit co-maigre dans $O$. On vérifie facilement que $O_0 = U\mathcal{O}$ est un élément de $\mathcal{O}$, donc $O_0 - A$ est maigre. Soit $A' = A - O_0$. $A'$ est $\mathfrak{M}$-définissable en termes d'un réel. Par suite si $A'$ n'est pas maigre, il contient d'après le Corollaire 2.6 un analytique $B$ non maigre. Mais comme $B$ a la propriété de Baire, il existe un ouvert $O$ non vide tel que $O \cap B$ soit co-maigre dans $O$. A fortiori $O \cap A$ est co-maigre dans $O$, donc $O \in \mathcal{O}$ et $O \subset O_0$, ce qui est contradictoire. Par suite $A' = A - O_0$ est maigre et $A$ a la propriété de Baire. □

REMARQUE 2.8. L'autre résultat important d'approximation dans le modèle $\mathfrak{N}$, démontré par Solovay par des techniques de forcing est le résultat de mesurabilité-Lebesgue des sous-ensembles de $2^\omega$. Nous allons montrer que ce résultat échappe à notre technique, et ceci parce qu'on ne peut pas remplacer, dans le Lemme 2.3, l'hypothèse que $\Phi$ est une relation fermée par une hypothèse moins restrictive.

Soit $\mu$ la mesure de Lebesgue sur $2^\omega$, et $\mathcal{T}_\mu$ le $\sigma$-idéal des ensembles de mesure nulle. Ce $\sigma$-idéal ne peut être engendré par des fermés. Par contre, il engendré, comme idéal, par les $G_\delta$ de mesure nulle, et il est facile de trouver $\Phi \subset 2^\omega \times 2^\omega$, $\Phi$ relation $\Pi_2^0$, telle que

(i) Pour tout $\beta \in 2^\omega$, $\Phi_\beta = \{\alpha, \Phi(\alpha, \beta)\}$ est un $G_\delta$ de mesure nulle.

(ii) Pour tout $A \subset 2^\omega$, $A$ de mesure nulle, il existe $\beta$ tel que $A \subset \Phi_\beta$.

Malheureusement, l'analogue du Lemme 2.3 pour cette relation $\Pi_2^0$ est faux:

En effet soit $\mathfrak{M}$ un modèle transitif de ZFC, et $C_1 = C_2 = \mathcal{B}_{0/\mathcal{T}_\mu} \dot{-} \{0\}$ l'ensemble de conditions de forcing de $\mathfrak{M}$ qui ajoute un réel aléatoire.

Soit $\alpha_1$ un réel aléatoire sur $\mathfrak{M}$, et $\alpha_2$ un réel $\mathfrak{M}[\alpha_1]$-générique pour $C_2$. Alors

(i) $\alpha$ est un réel aléatoire au dessus de $\mathfrak{M}$ si et seulement si $\alpha$ n'est dans aucun $G_\delta$ de mesure nulle à code dans $\mathfrak{M}$;

(ii) $\alpha_2$ est aléatoire au dessus de $\mathfrak{M}$, mais n'est pas aléatoire au dessus de $\mathfrak{M}[\alpha_1]$.

Par suite $\mathfrak{M}[\alpha_1, \alpha_2]$ satisfait:

$$\alpha_2 \in \mathfrak{M}[\alpha_2] \wedge \exists \beta \in \mathfrak{M}[\alpha_1]\Phi(\alpha_2, \beta) \wedge \forall \gamma \in \mathfrak{M} \neg\Phi(\alpha_2, \gamma).$$

**3. Les jeux $G^{\mathcal{T}}$ et la $\mathcal{T}$-régularité des ensembles projectifs.** Dans le cas, qui nous sert de modèle, de l'idéal $\mathcal{T}_0$ des fermés réduits à un point, le théorème de $\mathcal{T}_0$-régularité des ensembles $\Sigma_1^1$ (tout analytique non dénombrable contient un parfait) est dû à Sierpinski. La méthode de démonstration de Sierpinski, qui utilise ce que Dellacherie appelle un rabotage, a été systématisée et étendue par ce dernier, qui en déduit des théorèmes d'approximation pour les capacitances scissipares (pour la définition de ces notions et les résultats de Dellacherie, cf. **[2]**). Malheureusement, ces résultats ne sont pas utilisables dans les cas qui nous intéressent, car ils nécessitent une hypothèse (grossièrement, qu'une intersection dénombrable de "gros" fermés soit non vide) qui n'est pas vérifiée en général.

Une autre méthode de démonstration du théorème de Sierpinski, plus récente, utilise la détermination des jeux infinis à information parfaite (cf. Davis **[1]**):

Il est possible d'associer à $\mathcal{T}_0$ un jeu, noté $G_2^*$, sur l'ensemble $\{0, 1\}$, tel que si $A$ est un sous-ensemble de $2^\omega$, la détermination du jeu $G_2^*(A)$ soit équivalente à la $\mathcal{T}_0$-régularité de $A$.

A partir de ce résultat, et en utilisant les résultats sur les jeux, il est possible de décrire le comportement des ensembles projectifs vis-à-vis de la $\mathcal{T}_0$-régularité de manière très complète (cf. Kechris **[4]**).

C'est cette seconde méthode que nous allons systématiser. La Définition 3.1 dégage une condition suffisante sur $\mathcal{T}$ pour qu'un jeu puisse être associé à un idéal de fermés $\mathcal{T}$ de la même façon que $G_2^*$ est associé à $\mathcal{T}_0$. On en déduit ensuite des résultats de $\mathfrak{T}$-régularité pour les ensembles projectifs.

DÉFINITION 3.1. Soit $\mathfrak{T}$ un idéal propre de fermés de $\omega^\omega$. $\mathfrak{T}$ est dit de *type bien fondé* s'il existe une famille dénombrable $\mathfrak{R} = (R_n)_{n \in \omega}$ d'arbres sur $\omega$ satisfaisant

(1) $\forall n\ R_n$ est bien fondé (i.e. $[R_n] = \varnothing$),

(2) $\mathfrak{T} = \{F, \forall n \in \omega\ R_n \not\subset T_F\}$.

La suite $\mathfrak{R}$ est alors appelée une *règle* pour $\mathfrak{T}$.

Cette définition appelle un certain nombre de remarques

(1) Pour chaque idéal $\mathfrak{T}$, on peut toujours trouver un ensemble d'arbres sur $\omega$ satisfaisant (2): Il suffit de prendre l'ensemble des arbres $T_F$ correspondant aux fermés qui ne sont pas dans $\mathfrak{T}$. Dire que $\mathfrak{T}$ est de type bien fondé, c'est donc ajouter, comme conditions sur $\mathfrak{R}$, que $\mathfrak{R}$ est dénombrable et formée d'arbres bien fondés.

(2) Dans la suite, la donnée d'un idéal de type bien fondé sera la donnée d'un couple $(\mathfrak{T}, \mathfrak{R})$ satisfaisant (1) et (2).

(3) Si $\mathfrak{T}$ est un idéal de type bien fondé, et $\alpha_0$ est un élément de $\omega^\omega$ qui code $\mathfrak{R}$, alors $\mathfrak{T}$ est un idéal paramètré avec paramètre $\alpha_0$. Il suffit en effet de prendre pour relation $\Phi$ (sur $\omega^\omega \times (\mathrm{Seq}\ \omega)^\omega$)

$$\Phi(\alpha, \beta) \leftrightarrow \forall n(\beta(n) \in R_n \wedge \beta(n) \not\prec \alpha).$$

$\Phi$ est alors $\Pi^0_1(\alpha_0)$. Si $\beta \in (\mathrm{seq}\ \omega)^\omega$, et $F_\beta = \{\alpha, \Phi(\alpha, \beta)\}$, alors $\forall n$, $\beta(n) \in R_n$ et $\beta(n) \notin T_{F_\beta}$, donc d'après (2) $F_\beta \in \mathfrak{T}$. Enfin si $F \in \mathfrak{T}$, alors $\forall n \exists s$ $s \in R_n$ et $s \notin T_F$, donc il existe $\beta \in (\mathrm{seq}\ \omega)^\omega$ tel que $\forall n$ $\beta(n) \in R_n$ et $\forall \alpha \in F$, $\beta(n) \not\prec \alpha$ donc $F \subset F_\beta$.

Dans la suite, nous supposerons pour simplifier les notations, que $\mathfrak{R}$ est codée par $\alpha_0$ récursif, donc que $\Phi$ est $\Pi^0_1$. Par relativisation, on en déduit facilement les résultats analogues dans le cas général.

(4) Lorsque $\mathfrak{T}$ est un idéal de type bien fondé, avec règle $\mathfrak{R}$, le fait que $\mathfrak{T}$ est propre s'exprime de façon simple sur $\mathfrak{R}$:

Notons, pour $s \in \mathrm{Seq}\ \omega$, $C_s = \{n, R_n \subset T_{N_s}\}$ $(N_s = \{\alpha, s < \alpha\})$, et $\mathfrak{R}_s = \{(R_n)_s, n \in C_s\}$ (rappelons que si $T$ est un arbre, $T_s = \{s' \quad s \frown s' \in T\}$). Dire que tout fermé élément de $\mathfrak{T}$ est rare, c'est dire que $\forall s\ N_s \notin \mathfrak{T}$, donc que $\forall s$ $\exists n\ R_n \subset T_{N_s}$, en d'autres termes que pour tout $s$, $C_s$ est non vide. D'autre part, dire que tout fermé réduit à un point est dans $\mathfrak{T}$, c'est dire que $\forall s \in \mathrm{Seq}\ \omega$, $\forall n \in \omega$, $R_n \not\subset \{s', s' \prec s\}$, en d'autres termes que pour chaque $n \in C_s$, $(R_n)_s \neq \{\varnothing\}$,

Ces deux faits font que la définition qui suit est bien la définition d'un jeu infini:

DÉFINITION 3.2. Soit $\mathfrak{T}$ un idéal propre de fermés de $\omega^\omega$ de type bien fondé, $\mathfrak{R}$ une règle pour $\mathfrak{T}$, et $A$ un sous-ensemble de $\omega^\omega$. Le jeu infini à deux joueurs $G^{\mathfrak{T}}_A$ est défini de la manière suivante: Le joueur I joue $n_0 \in \omega$, puis le joueur II joue $s_0 \in \mathrm{Seq}\ \omega$, $s_0 \neq \varnothing$, $s_0 \in R_{n_0}$. I répond par $n_1 \in C_{s_0}$, . . . etc. au $k$ième coup de la partie, I joue $n_k \in C_{s_0 \frown s_1 \frown \cdots \frown s_{k-1}}$, et II une suite $s_k$ non vide, $s_k \in (R_{n_k})_{s_0 \frown s_1 \frown \cdots \frown s_{k-1}}$. Notons $\alpha = s_0 \frown s_1 \frown \cdots \frown s_k \frown \cdots$ le résultat de la partie. On dit que I gagne $G^{\mathfrak{T}}_A$ si $\alpha \in A$.

Avant de démontrer que la détermination du jeu $G_A^{\mathfrak{T}}$ équivaut à la $\mathfrak{T}$-régularité de l'ensemble $A$, nous allons introduire une version "avec témoin" du jeu précédent, que nous noterons $\mathbf{G}^{\mathfrak{T}}$.

DÉFINITION 3.3. Avec les mêmes hypothèses que dans la définition précédente, soient $\lambda$ un ordinal, et $B$ un sous-ensemble de $\omega^\omega \times \lambda^\omega$. Le jeu $\mathbf{G}_B^{\mathfrak{T}}$ est défini de la manière suivante: I joue un ordinal $\xi_0 < \lambda$, et $n_0 \in \omega$. II répond par $s_0 \neq \varnothing$, $s_0 \in R_{n_0}$, puis I joue un ordinal $\xi_1 < \lambda$ et $n_1 \in C_{s_0}$, etc.

Les règles de jeu sont les mêmes que dans les jeux $G^{\mathfrak{T}}$, sauf que le joueur I construit aussi un élément $f \in \lambda^\omega$ $(f = \xi_0, \xi_1, \ldots)$. Par définition, I gagne le jeu $\mathbf{G}_B^{\mathfrak{T}}$ si $(\alpha, f) \in B$.

Le lemme qui suit est le résultat fondamental qui va permettre d'établir tous les résultats de cette section. C'est une généralisation de résultats connus (en particulier pour les jeux $G_2^*$ et pour les jeux étudiés par Kechris dans [6]), et surtout de techniques qui sont maintenant classiques pour ce genre de problèmes.

LEMME 3.4. *Soit* $B \subset \omega^\omega \times \lambda^\omega$, *et* $A = p(B) = \{\alpha \in \omega^\omega \exists f \in \lambda^\omega (\alpha, f) \in B\}$.

(i) *Si* $\sigma$ *est une stratégie gagnante pour le joueur* I *dans le jeu* $\mathbf{G}_B$, *on peut associer canoniquement à* $\sigma$ *un fermé* $\mathfrak{T}$*-parfait* $F$ *contenu dans* $A$.

(ii) *Si* $\tau$ *est un stratégie gagnante pour le joueur* II *dans* $\mathbf{G}_B^{\mathfrak{T}}$, *on peut associer canoniquement à* $\tau$ *un sous ensemble* $C_\tau$ *de* $(\text{seq}\ \omega)^\omega$, *de cardinalité au plus* $\sup(\omega, \text{card}\ \lambda)$, *tel que* $A \subset \bigcup_{\beta \in C_\tau} F_\beta$ (*si* $\beta \in (\text{Seq}\ \omega)^\omega$, $F_\beta = \{\alpha, \Phi(\alpha, \beta)\}$ *est défini, d'après la Remarque* (2), *par* $F_\beta = \varnothing$ *si* $\exists n\ \beta(n) \notin R_n$, *et* $F_\beta = \{\alpha, \forall n \beta(n) \not\prec \alpha\}$ *sinon*).

DÉMONSTRATION. (i) Soit $\sigma$ une stratégie gagnante pour I. Nous dirons qu'une suite $t = (s_0, s_1, \ldots, s_{k-1})$ est $\sigma$-licite si elle correspond à un jeu possible de II, I jouant selon sa stratégie $\sigma$. Soit alors $T_\sigma = \{s, \exists t = (s_0, \ldots, s_{k-1})\ \sigma\text{-licite}, s \prec s_0 ^\frown s_1 ^\frown \cdots ^\frown s_{k-1}\}$, $T_\sigma$ est un arbre sur $\omega$. Posons $F = [T_\sigma]$. Nous allons prouver que $F$ convient.

(a) $F$ est $\mathfrak{T}$-parfait: Nous devons prouver que $\forall s \in \text{Seq}\ \omega$, si $N_s \cap F \neq \varnothing$, alors $N_s \cap F \notin \mathfrak{T}$. Soit donc $s$ tel que $N_s \cap F \neq \varnothing$, c'est-à-dire $s \in T_\sigma$. D'après la définition de $T_\sigma$, il existe une suite $\sigma$-licite $t = (s_0, \ldots, s_{k-1})$ telle que $s \prec s_0 ^\frown \cdots ^\frown s_{k-1} = s'$. Soit $n_k = \sigma(t)$. Pour chaque $u$ élément de $(R_{n_k})_{s'}$, $t^\frown\{u\}$ est $\sigma$-licite. Donc $R_{n_k} \subset T_\sigma \cap T_{N_s}$, et par suite $N_s \cap F \notin \mathfrak{T}$.

(b) $F \subset A$: Soit $\alpha \in F$, et soit $T_\alpha = \{t = (s_0, \ldots, s_{k-1}),\ t$ est $\sigma$-licite et $s_0 ^\frown s_1 ^\frown \cdots ^\frown s_{k-1} \prec \alpha\}$. $T_\alpha$ est un arbre sur Seq $\omega$. Nous allons montrer que $T_\alpha$ n'est pas bien fondé, c'est-à-dire, intuitivement, que $\alpha$ correspond bien à une partie jouée dans le jeu $\mathbf{G}_B^{\mathfrak{T}}$. Ce sera alors terminé: Si $(s_0, s_1, \ldots, s_k, \ldots)$ est une branche de $T_\alpha$, c'est un jeu $\sigma$-licite pour II, et $s_0 ^\frown s_1 ^\frown \cdots ^\frown s_k ^\frown \cdots = \alpha$. Soit $f \in \lambda^\omega$ le jeu correspondant de I par sa stratégie $\sigma$. Puisque $\sigma$ est gagnante pour I, $(\alpha, f) \in B$, donc $\alpha \in A$.

Soit $t = (s_0, s_1, \ldots, s_{k-1})$ un élément de $T_\alpha$, $s' = s_0 ^\frown \cdots ^\frown s_{k-1}$, et $n_k$ l'entier joué par I suivant $\sigma$ au $k$ième coup. Si $s$ est tel que $t^\frown\{s\} \in T_\alpha$ alors

$s \in (R_{n_k})_{s'}$ et $s' \frown s \prec \alpha$. Puisque $R_{n_k}$ est bien fondé, l'ensemble des $s$ tels que $t \frown \{s\} \in T_\alpha$ est fini. Pour pouvoir appliquer le lemme de König à $T_\alpha$, il suffit donc de prouver que $T_\alpha$ n'est pas fini. Mais s'il l'était, on pourrait trouver $t \in T_\alpha$ tel que (avec les mêmes définitions de $s'$ et de $n_k$) pour chaque $m$, il existe $s \in (R_{n_k})_{s'}$ tel que $\alpha|_m \prec s' \frown s$, et ceci contredit le fait que $R_{n_k}$ est bien fondé.

(ii) Supposons maintenant que $\tau$ est une stratégie gagnante pour le second joueur. Nous dirons qu'une suite $(n_0, \xi_0, n_1, \xi_1, \dots, n_{k-1}, \xi_{k-1})$ est $\tau$-licite si elle correspond à un jeu licite du joueur I dans $\mathbf{G}_B^{\mathfrak{I}}$, II jouant selon sa stratégie $\tau$.

Nous allons associer à chaque suite $\tau$-licite $t$ et ordinal $\xi < \lambda$ une application $\beta_{t,\xi}$ de $\omega$ dans seq $\omega$: Soit $(s_0, \dots, s_{k-1})$ la réponse de II par $\tau$ au jeu $t$, et $s' = s_0 \frown s_1 \frown \cdots \frown s_{k-1}$. Si $n \notin C_{s'}$, on prend pour $\beta_{t,\xi}(n)$ un point quelconque de $R_n \dot{-} T_{N_{s'}}$. Si $n \in C_{s'}$, alors $\beta_{t,\xi}(n)$ est égal à $s' \frown s$, où $s$ est la réponse de II par sa stratégie $\tau$ au jeu (licite) de I: $(n_0, \xi_0, \dots, n_{k-1}, \xi_{k-1}, n, \xi)$. Posons alors $C_\tau = \{\beta_{t,\xi}, t\ \tau\text{-licite et } \xi < \lambda\}$. $C_\tau$ est clairement un sous-ensemble de $(\text{seq}\ \omega)^\omega$ de cardinalité au plus $\sup(\aleph_0, \text{card}\ \lambda)$. Nous allons montrer que $C_\tau$ convient, c'est-à-dire que pour tout $\alpha \in A$, il existe $t$ $\tau$-licite et $\xi < \lambda$ tels que $\alpha \in F_{\beta_{t,\xi}}$.

Soit donc $\alpha \in A$, et soit $f \in \lambda^\omega$ tel que $(\alpha, f) \in B$. Un couple $(t, \xi)$ est $(\alpha, f)$-bon si $t = (n_0, \xi_0, \dots, n_{k-1}, \xi_{k-1})$ est $\tau$-licite, $\xi_0 = f(0), \dots, \xi_{k-1} = f(k-1)$ si $\xi = f(k)$, et, en notant $(s_0, \dots, s_{k-1})$ la réponse par $\tau$ de II au jeu $t$, si $s_0 \frown s_1 \cdots \frown s_{k-1} \prec \alpha$.

Si pour tout couple $(t, \xi)$ $(\alpha, f)$-bon, on peut trouver un entier $n$ tel que le couple $(t \frown (n, \xi), f(k+1))$ soit $(\alpha, f)$-bon, alors on peut trouver une partie de jeu $\mathbf{G}_B^{\mathfrak{I}}$, dans laquelle II joue selon $\tau$, et qui produit le couple $(\alpha, f) \in B$, ce qui contredit le fait que $\tau$ est gagnante pour II. Il existe donc un couple $(t, \xi)$ qui est $(\alpha, f)$-bon et ne peut-être étendu. Pour ce couple, nous allons voir que $\alpha \in F_{\beta_{t,\xi}}$. D'une part, comme $t$ est $\tau$-licite, alors $\forall n\ \beta_{t,\xi}(n) \in R_n$, d'après la définition de $\beta_{t,\xi}$.

Si $n \notin C_{s_0 \frown s_1 \frown \cdots \frown s_{k-1}}$, $\beta_{t,\xi}(n) \notin T_{N_{s_0 \frown s_1 \frown \cdots \frown s_{k-1}}}$, donc $\beta_{t,\xi}(n) \not\prec \alpha$.

Si $n \in C_{s_0 \frown s_1 \frown \cdots \frown s_{k-1}}$, alors $t \frown \langle n, \xi \rangle$ est $\tau$-licite, donc si $\beta_{t,\xi}(n) \prec \alpha$, alors le couple $(t \frown (n, \xi), f(k+1))$ est $(\alpha, f)$-bon, ce qui contredit le choix de $(t, \xi)$.

Donc pour tout $n$, $\beta_{t,\xi}(n) \not\prec \alpha$, c'est-à-dire $\alpha \in F_{\beta_{t,\xi}}$. □

Comme première application de ce lemme, nous allons montrer que, $\mathfrak{I}$ étant de type bien fondé, la $\mathfrak{I}$-régularité d'un ensemble $A$ équivaut à la détermination du jeu $G_A^{\mathfrak{I}}$. Plus précisément:

THÉORÈME 3.5. *Soit $\mathfrak{I}$ un idéal de fermés de $\omega^\omega$, de type bien fondé, et $A \subset \omega^\omega$. Alors*

(i) *Le joueur* I *a une stratégie gagnante dans le jeu $G_A^{\mathfrak{I}}$ si et seulement si $A$ contient un fermé $\mathfrak{I}$-parfait.*

(ii) *Le joueur* II *a une stratégie gagnante dans $G_A^{\mathfrak{I}}$ si et seulement si $A \in \mathfrak{I}_\sigma$. Par suite, le jeu $G_A^{\mathfrak{I}}$ est déterminé si et seulement si $A$ est régulier.*

Démonstration. Le jeu $G_A^{\mathfrak{I}}$ est un cas particulier des jeux $\mathbf{G}_B^{\mathfrak{I}}$, avec $\lambda = 1$ et $B = A \times \{0\}$. Les implications ($\Rightarrow$) de (i) et (ii) se déduisent donc du Lemme 3.4. Il reste à établir les implications inverses:

(i) Soit $F$ un fermé $\mathfrak{I}$-parfait, $F \subset A$. $F$ étant $\mathfrak{I}$-parfait, l'arbre $T_F$ associé satisfait: $\forall s \in T_F$, $\exists n \in C_s$ $R_n \subset T_F$. La stratégie gagnante de I est alors claire: I oblige II à jouer des suites $(s_0, \ldots, s_{k-1})$ telles que $s_0{}^\frown s_1{}^\frown \cdots {}^\frown s_{k-1} \in T_F$, en choisissant un entier $n_k \in C_{s_0{}^\frown s_1{}^\frown \cdots {}^\frown s_{k-1}}$ tel que $R_{n_k} \subset T_F$.

(ii) Soit $(F_n)_{n\in\omega}$ une suite d'éléments de $\mathfrak{I}$ telle que $A \subset \bigcup_{n\in\omega} F_n$. La stratégie gagnante du joueur II consiste à éviter, au $k$ième coup, le fermé $F_k$, ce qui assure que la suite $\alpha$ résultante ne sera pas dans $A$: Si I a joué $n_0, \ldots, n_{k-1}$ et II $s_0, \ldots, s_{k-1}$, alors quand I joue $n_k \in C_{s_0 \cdots s_{k-1}}$, II peut trouver $s_k$ tel que $s_0{}^\frown s_1{}^\frown \cdots {}^\frown s_{k-1}{}^\frown s_k \in R_{n_k} - T_{F_k}$, puisque $F_k \in \mathfrak{I}$. Ceci définit clairement une stratégie gagnante. $\square$

Le théorème précédent permet d'obtenir des résultats de $\mathfrak{I}$-régularité moyennant des hypothèses de détermination des jeux. Par exemple, l'axiome de détermination AD entraîne que tous les sous-ensembles de $\omega^\omega$ sont $\mathfrak{I}$-réguliers pour tout idéal de fermés de type bien fondé.

Cependant ce théorème est assez grossier: le meilleur résultat (dans ZF) que nous pouvons en déduire est la $\mathfrak{I}$-régularité des ensembles boréliens. On n'obtient le résultat sur les ensembles analytiques que moyennant l'axiome $\mathrm{Det}(\mathbf{\Sigma}_1^1)$, qui est un axiome de grand cardinal.

En fait, nous utiliserons ce théorème dans l'autre sens, c'est-à-dire pour démontrer la détermination de certains jeux. Et c'est une utilisation plus fine du Lemme 3.4 qui va nous fournir les résultats de $\mathfrak{I}$-régularité.

Théorème 3.6. *Soit $\mathfrak{I}$ un idéal propre de type bien fondé de fermés de $\omega^\omega$, paramétré par une relation $\Pi_1^0$, et $A$ un sous ensemble de $\omega^\omega$.*

(i) *Si $A$ est un ensemble $\Sigma_1^1(\alpha_0)$, alors ou bien $A$ contient un fermé $\mathfrak{I}$-parfait, ou bien il existe une suite $(\beta_n)_{n\in\omega}$ d'éléments de* $(\mathrm{Seq}\ \omega)^\omega$ *codée par un réel $\Delta_1^1(\alpha_0)$, telle que $\forall \alpha \in A\ \exists n \Phi(\alpha, \beta_n)$.*

*En particulier, tout analytique est $\mathfrak{I}$-régulier.*

(ii) *Si $A$ est un ensemble $\Sigma_2^1(\alpha_0)$, alors ou bien $A$ contient un fermé $\mathfrak{I}$-parfait, d'arbre constructible en $\alpha_0$, ou bien*

$$\forall \alpha \in A \exists \beta \in L[\alpha_0] \Phi(\alpha, \beta).$$

*En particulier, si $\forall \alpha\ \aleph_1^{L[\alpha]} < \aleph_1$, tout $\mathbf{\Sigma}_2^1$ est $\mathfrak{I}$-régulier.*

(iii) *Supposons* $\mathrm{Det}(\mathbf{\Delta}_{2n}^1)$. *Alors tout $\mathbf{\Sigma}_{2n+1}^1$ est $\mathfrak{I}$-régulier, et plus précisément, on a un résultat effectif analogue à celui de* (i):

*Si $A$ est un ensemble $\Sigma_{2n+1}^1(\alpha_0)$, et $A$ ne contient aucun fermé $\mathfrak{I}$-parfait, alors il existe une suite $(\beta_n)_{n\in\omega}$ d'éléments de* $(\mathrm{Seq}\ \omega)^\omega$, *codée par un réel $\Delta_{2n+1}^1(\alpha_0)$, telle que $\forall \alpha \in A\ \exists n \Phi(\alpha, \beta_n)$.*

Démonstration. (i) Soit $A$ un ensemble $\Sigma_1^1$ (le résultat relativisé se démontre de la même façon). Il existe un ensemble $\Pi_1^0$ $B$ de $\omega^\omega \times \omega^\omega$ tel que $A = p(B)$. Le jeu $\mathbf{G}_B^{\mathfrak{I}}$ est alors $\Pi_1^0$, donc déterminé d'après Gale-Stewart. On applique alors le Lemme 3.4 à ce jeu, ce qui fournit le résultat, en utilisant, pour le résultat effectif, le fait que si II a une stratégie gagnante dans $\mathbf{G}_B^{\mathfrak{I}}$, alors il a une stratégie $\tau$ qui est $\Delta_1^1$, et que par suite l'ensemble $C_\tau$ peut être codé de façon $\Delta_1^1$.

(iii) Le résultat pour $A$ $\Sigma_{2n+1}^1$ se démontre de manière rigoureusement semblable, en utilisant un ensemble $B$ $\Pi_{2n}^1$ de $\omega^\omega \times \omega^\omega$ tel que $A = p(B)$. Le jeu $\mathbf{G}_B^{\mathfrak{I}}$ est alors $\Pi_{2n}^1$, donc déterminé d'après le théorème de Martin et notre hypothèse $\mathrm{Det}(\mathbf{\Delta}_{2n}^1)$. On utilise alors le Lemme 3.4 et le fait que si II a une stratégie gagnante dans $\mathbf{G}_B^{\mathfrak{I}}$, il a une stratégie gagnante $\Delta_{2n+1}^1$.

(ii) Supposons pour simplifier que $A$ est un ensemble $\Sigma_2^1$, le résultat relativisé se démontrant de la même façon. Il existe alors un arbre $T$ sur $\omega \times \aleph_1$, $T$ constructible, tel que si $B = [T]$, alors $A = p(B)$.

Le jeu $\mathbf{G}_B^{\mathfrak{I}}$ est alors un jeu fermé, donc déterminé. De plus, par absoluïté des jeux fermés, le joueur I (respectivement II) a une stratégie gagnante dans ce jeu si et seulement si il a une stratégie gagnante constructible $\sigma$ (respectivement $\tau$). L'ensemble $T_\sigma$ (respectivement $C_\tau$) du Lemme 3.4 est alors constructible, ce qui démontre (ii). □

Maintenant que nous avons démontré la $\mathfrak{I}$-régularité des ensembles analytiques, pour $\mathfrak{I}$ de type bien fondé, nous pouvons utiliser les résultats du §2 pour compléter nos résultats de $\mathfrak{I}$-régularité:

THÉORÈME 3.7. *Soit $\mathfrak{N}$ le modèle de Lévy du* §2, *et dans $\mathfrak{N}$ soit $\mathfrak{I}$ un idéal de fermés de $\omega^\omega$ de type bien fondé. Alors dans $\mathfrak{N}$ tout sous-ensemble de $\omega^\omega$ $\mathfrak{N}$-définissable en terme d'un réel est $\mathfrak{I}$-régulier. Par suite, dans le modèle $\mathfrak{N}_1$ de Levy-Solovay, tout sous-ensemble de $\omega^\omega$ est $\mathfrak{I}$-régulier.*

REMARQUE 3.8. Il est possible de généraliser légèrement le Lemme 3.4, et par suite les résultats précédents. Nous allons indiquer brièvement comment ceci est possible. Nous avons vu, dans le §1, qu'il était possible d'associer canoniquement à un idéal propre $\mathfrak{I}$ de fermés sur un sous-ensemble fermé $P$ de $\omega^\omega$ un idéal propre $\mathbf{\mathfrak{I}}$ de fermés de $\omega^\omega$ (et réciproquement). Il est facile de voir que l'idéal $\mathbf{\mathfrak{I}}$ est de type bien fondé si et seulement si il existe une suite $(R_n)_{n\in\omega}$ d'arbres bien fondés sur $\omega$, telle que $\forall n\ R_n \subset T_P$ et telle que $\mathfrak{I} = \{F \subset P, \forall n\ R_n \not\subset T_F\}$ ce qui correspond à la définition naturelle d'idéal de fermés de type bien fondé sur $P$.

Supposons maintenant que $A_0$ soit un $G_\delta$ de $\omega^\omega$, et soit $\mathfrak{I}$ un idéal propre de fermés de $A_0$. Nous dirons, par analogie, que $\mathfrak{I}$ est de type bien fondé, s'il existe une suite $\mathfrak{R} = (R_n)_{n\in\omega}$ d'arbres sur $\omega$ telle que

(i) $\forall n\ [R_n] \cap A_0 = \varnothing$,

(ii) $\mathfrak{I} = \{F$ fermés dans $A_0\ \forall n\ R_n \not\subset T_{\bar{F}}\}$ ($\bar{F}$ désigne l'adhérence de $F$ dans $\omega^\omega$).

Il est facile de voir que cette définition coïncide avec la précédente lorsque $A_0$ est fermé. Cependant, il est faux en général que, si $\mathfrak{I}$ est de type bien fondé sur $A_0$, alors l'idéal $\mathbf{\mathfrak{I}}$ canoniquement associé sur $\omega^\omega$ soit de type bien fondé. Malgré ce fait, en définissant de la même manière les jeux $G_A^{\mathfrak{I}}$ et $\mathbf{G}_B^{\mathfrak{I}}$, pour $A \subset A_0$ et $p(B) \subset A_0$, les conclusions du Lemme 3.4 subsistent, donc aussi les résultats des Théorèmes 3.5, 3.6 et 3.7, en supposant évidemment, pour les résultats effectifs, que $A_0$ est un ensemble $\Pi^0_2$.

La seule difficulté pour adapter la démonstration du Lemme 3.4 réside dans le fait que l'on n'a plus $[T_\sigma] \subset A$ dans le cas (i). Cependant on montre facilement, en utilisant le fait que si $\alpha \in A_0$, alors $\forall n\ \alpha \notin [R_n]$, que $[T_\sigma] \cap A_0 \subset A$, ce qui suffit à prouver le lemme.

Nous verrons dans le §4 l'intérêt de cette généralisation dans le cas particulier, étudié par Kechris dans **[6]**, des ensembles $K_\sigma$-bornés.

Auparavant, nous allons terminer le §3 par une étude plus précise des ensembles "petits" associés à un idéal de type bien fondé. Dans le cas fondamental de l'idéal $\mathfrak{I}_0$, les ensembles du $\sigma$-idéal associé sont les ensembles dénombrables. Une étude très complète des ensembles projectifs dénombrables a été faite par Kechris dans **[4]**. Certains de ses résultats, concernant en particulier l'existence d'un plus grand ensemble dénombrable d'une classe projective effective donnée, sont en fait établis pour des classes plus générales de notions de "petitesse", moyennant certaines hypothèses.

Nous allons utiliser ici ces résultats, en prouvant que les hypothèses introduites par Kechris sont vérifiées dans les cas qui nous occupent. Les idées des démonstrations qui suivent se trouvent dans les articles de Kechris (**[3]** et **[4]**).

DÉFINITION 3.9. Soit $\mathfrak{I}$ un idéal de fermés de $\omega^\omega$. Un ensemble $A$ est dit $\mathfrak{I}$-*mince* si $A$ ne contient aucun fermé $\mathfrak{I}$-parfait.

La terminologie suit la terminologie ("ensemble mince") utilisée dans le cas de l'idéal $\mathfrak{I}_0$. Nous noterons $M_\mathfrak{I}$ l'ensemble des parties $\mathfrak{I}$-minces. Evidemment si $A \in M_\mathfrak{I}$ et $A$ est $\mathfrak{I}$-régulier, alors $A \in \mathfrak{I}_\sigma$.

Kechris introduit dans **[3]** une propriété d'additivité des familles d'ensembles:

DÉFINITION 3.10 (KECHRIS). Si $\Phi$ est une famille de parties de $\omega^\omega$, et $\Gamma$ est une classe adéquate, $\Phi$ est dite $\Gamma$-additive si elle vérifie la propriété suivante: Pour toute famille $\psi = (A_\xi)_{\xi<\lambda}$ d'éléments de $\Phi$, où $\lambda$ est un ordinal, telle que le pré bon ordre $\leqslant_\psi$ défini par

$$x <_\psi y \leftrightarrow x \in \bigcup_{\xi<\lambda} A_\xi \wedge y \in \bigcup_{\xi<\lambda} A_\xi \wedge \inf\{\xi\ x \in A_\xi\} < \inf\{\xi y \in A_\xi\}$$

est, comme sous ensemble de $\omega^\omega \times \omega^\omega$, dans $\Gamma$, alors $\bigcup_{\xi<\lambda} A_\xi \in \Phi$.

PROPOSITION 3.11. *Soit $\mathfrak{I}$ un idéal propre de fermés de $\omega^\omega$ de type bien fondé, et soit $\Gamma$ une classe adéquate formée d'ensembles ayant la propriété de Baire. Alors $M_\mathfrak{I}$ est $\Gamma$-additive.*

DÉMONSTRATION. Nous allons utiliser le théorème de Kuratowski-Ulam sur la propriété de Baire (qui est l'analogue du théorème de Fubini pour la mesure): Si $A \subset \omega^\omega \times \omega^\omega$ a la propriété de Baire, alors l'ensemble des $\alpha \in \omega^\omega$ tels que la coupe $A_\alpha$ ait la propriété de Baire est co-maigre dans $\omega^\omega$.

Nous allons en fait démontrer la Proposition 3.11 pour tout idéal propre de type bien fondé de fermés d'un sous-ensemble fermé de $\omega^\omega$ (cf. Remarque 3.8).

La démonstration se fait par l'absurde: Si l'assertion est fausse, nous pouvons trouver un contre exemple d'ordinal $\lambda$ minimum, soit $(P, \mathfrak{I}, (A_\xi)_{\xi<\lambda} = \Phi)$ tels que $P$ est fermé dans $\omega^\omega$, $\mathfrak{I}$ est un idéal propre de type bien fondé de fermés de $P$, $\leqslant_\Phi$ est dans $\Gamma$ et cependant $\bigcup_{\xi<\lambda} A_\xi \notin M_{\mathfrak{I}}$.

D'après l'hypothèse, $\bigcup_{\xi<\lambda} A_\xi$ contient un fermé $\mathfrak{I}$-parfait $P_1$. Considérons $\mathfrak{I}_1 = \{F \cap P_1, F \in \mathfrak{I}\}$. $\mathfrak{I}_1$ est un idéal propre de type bien fondé de fermés de $P_1$.

Pour tout $\xi$, soit $B_\xi = A_\xi \cap P_1$, et soit $\Phi_1 = \{B_\xi, \xi < \lambda\}$. Chaque $B_\xi$ est clairement $\mathfrak{I}_1$-mince. De plus, en utilisant le théorème de Kuratowski-Ulam au graphe de $\leqslant_\Phi$, il existe un ensemble co-maigre $X$ de $P_1$ tel que, si $y_0 \in X$, alors les graphes des relations $x \leqslant_{\Phi_1} y_0$, $y \leqslant_{\Phi_1} y_0$ et $x \leqslant_{\Phi_1}^{y_0} y$ définie par $x \leqslant_{\Phi_1}^{y_0} y \leftrightarrow x \leqslant_{\Phi_1} y_0 \wedge y \leqslant_{\Phi_1} y_0 \wedge x \leqslant_{\Phi_1} y$ sont des ensembles ayant la propriété de Baire. Par suite, en posant $\xi_{y_0} = \inf\{\xi, y_0 \in B_\xi\}$, on obtient que pour tout $y_0 \in X$, $\bigcup_{\xi<\xi_{y_0}} B_\xi$ est $M_{\mathfrak{I}_1}$-mince (d'après la minimalité de $\lambda$).

Supposons avoir démontré que tout ensemble $\mathfrak{I}_1$-mince et ayant la propriété de Baire est maigre dans $P_1$. Il existe alors sur $P_1$ une famille $\Phi_1 = (B_\xi)_{\xi<\lambda}$, dont le pré-bon ordre associé $\leqslant_{\Phi_1}$ a la propriété de Baire, et tel que pour tout élément $x$ de l'ensemble co-maigre $X$, le segment initial $\{y, y \leqslant_{\Phi_1} x\}$ est maigre. Ceci implique, de nouveau en utilisant le théorème de Kuratowski-Ulam, que $P_1 = \bigcup_{\xi<\lambda} B_\xi$ est aussi maigre dans $P_1$, ce qui est contradictoire, et prouve la proposition.

Il reste à voir qu'un ensemble $A$ $\mathfrak{I}_1$-mince et ayant la propriété de Baire est maigre. Soit $B$ un $G_\delta$ contenu dans $A$. $B$ est $\mathfrak{I}_1$-mince et $\mathfrak{I}_1$-régulier d'après le Théorème 3.6, donc $B$ est dans $(\mathfrak{I}_1)_\sigma$. Mais comme $\mathfrak{I}_1$ est un idéal propre de $P_1$, tout élément de $\mathfrak{I}_1$ est rare dans $P_1$, donc $B$ est maigre dans $P_1$. $A$ ayant la propriété de Baire, ceci montre que $A$ lui-même est maigre dans $P_1$. $\square$

Pour pouvoir appliquer les résultats de Kechris, nous avons besoin d'un autre résultat concernant $M_{\mathfrak{I}}$:

PROPOSITION 3.12. *Supposons* $\mathrm{Det}(\boldsymbol{\Delta}^1_{2n})$, *si* $n > 0$. *Soit* $G \subset \omega^\omega \times \omega^\omega$ *un ensemble* $\Pi^1_{2n+1}$ *qui est universel pour les* $\boldsymbol{\Pi}^1_{2n+1}$ *de* $\omega^\omega$, *et soit* $\mathfrak{I}$ *un idéal propre de fermés de* $\omega^\omega$, *de type bien fondé, paramétré par une relation* $\Pi^0_1$. *La relation* $M^{2n+1}_{\mathfrak{I}}(\alpha) \leftrightarrow$ "$\omega^\omega \dot{-} G_\alpha$ *est* $\mathfrak{I}$*-mince" est une relation* $\Pi^1_{2n+1}$.

DÉMONSTRATION. Soit $A$ un ensemble $\Sigma^1_{2n+1}(\alpha)$ contenu dans $\omega^\omega$, et $B \subset \omega^\omega \times \omega^\omega$, $B \in \Pi^1_{2n}$, tel que $A = p(B)$. $A$ est $\mathfrak{I}$-mince, d'après le Lemme 3.4, si et seulement si I n'a pas de stratégie gagnante dans $\mathbf{G}_B$, donc si et seulement si II a une stratégie gagnante puisque le jeu $\mathbf{G}^{\mathfrak{I}}_B$ est déterminé d'après l'hypothèse faite, car $\Pi^1_{2n}$. Ceci s'écrit clairement de façon $\Pi^1_{2n+1}$. $\square$

Nous pouvons maintenant appliquer l'un des théorèmes généraux de Kechris [**4**, Théorème 1.A-2]:

THÉORÈME 3.13. *Soit* $\mathfrak{I}$ *de type bien fondé, paramétré par une relation* $\Pi^0_1$.

(i) *Supposons* $\mathrm{Det}(\boldsymbol{\Delta}^1_{2n})$ *si* $n > 0$. *Il existe un plus grand ensemble* $\Pi^1_{2n+1}$ *et* $\mathfrak{I}$*-mince.*

(ii) *Supposons de plus* $\mathrm{Det}(\boldsymbol{\Sigma}^1_{2n+1})$. *Il existe alors un plus grand ensemble* $\Sigma^1_{2n+2}$ *dans* $\mathfrak{I}_\sigma$.

DÉMONSTRATION. (i) est une conséquence directe du théorème 1.A-2 de [4] et des Propositions 3.11 et 3.12.

(ii) Si on suppose $\mathrm{Det}(\Sigma^1_{n+1})$, alors par le Théorème 3.5 tout $\Pi^1_{2n+1}$ est $\mathfrak{T}$-régulier. L'existence d'un plus grand ensemble $\Pi^1_{2n+1}$ dans $\mathfrak{T}_\sigma$ se déduit donc de (i). Soit $G \subset \omega \times \omega^\omega \times \omega^\omega$ un $\Pi^1_{2n+1}$ universel pour les ensembles $\Pi^1_{2n+1}$ de $\omega^\omega \times \omega^\omega$, et $\phi$ une $\Pi^1_{2n+1}$-norme sur $G$, qui existe puisque nous avons supposé $\mathrm{Det}(\Delta^1_{2n})$. Définissons $C^{\mathfrak{T}}_{2n+2} = \{\alpha \in \omega^\omega, \exists i \exists \beta\ G(i, \alpha, \beta) \wedge \{\alpha', \exists \beta' \phi(i, \alpha', \beta') < \phi(i, \alpha, \beta)\} \in \mathfrak{T}_\sigma\}$. Nous allons montrer que $C^{\mathfrak{T}}_{2n+2}$ est le plus grand ensemble $\Sigma^1_{2n+2}$ dans $\mathfrak{T}_\sigma$.

Tout d'abord $C^{\mathfrak{T}}_{2n+2}$ est $\Sigma^1_{2n+2}$. En effet, $C^{\mathfrak{T}}_{2n+2} = \bigcup_{i \in \omega} D_i$, où

$$\begin{aligned} D_i &= \{\alpha \in \omega^\omega, \exists \beta\ G(i, \alpha, \beta) \wedge \{\alpha', \exists \beta'\ \phi(i, \alpha', \beta') < \phi(i, \alpha, \beta)\} \in \mathfrak{T}_\sigma\} \\ &= \{\alpha \in \omega^\omega, \exists \beta\ G(i, \alpha, \beta) \wedge \exists (\beta_k)_{k \in \omega} \\ &\qquad \forall \alpha' [\exists k \Phi(\alpha', \beta_k) \vee \forall \beta' \neg(\phi(i, \alpha', \beta') < \phi(i, \alpha, \beta))]\} \end{aligned}$$

et par suite $D_i$ est $\Sigma^1_{2n+2}$.

Pour $\xi < |\phi|$, soit $D_{i,\xi} = \{\alpha \in D_i, \exists \beta\ G(i, \alpha, \beta) \wedge \phi(i, \alpha, \beta) \leqslant \xi\}$. On a $D_i = \bigcup_{\xi < |\phi|} D_{i,\xi}$, et le pré-bon ordre associé à la famille $D_{i,\xi}$ sur $D_i$ est défini par

$$\alpha' <_i \alpha \leftrightarrow \alpha' \in D_i \wedge \alpha \in D_i \wedge \exists \beta \exists \beta' [G(i, \alpha, \beta) \wedge G(i, \alpha', \beta') \wedge \phi(i, \alpha', \beta') < \phi(i, \alpha, \beta)]$$

donc est $\Sigma^1_{2n+2}$. Enfin pour tout $\alpha \in D_i$, $\{\alpha', \alpha' <_i \alpha\}$ est dans $\mathfrak{T}_\sigma$ par définition de $D_i$. Comme d'après l'hypothèse $\mathrm{Det}(\Sigma^1_{2n+1})$, tout $\Sigma^1_{2n+2}$ a la propriété de Baire, nous pouvons appliquer 3.11: chaque $D_i$ est $\mathfrak{T}$-mince, c'est-à-dire d'après le Théorème 3.6 est dans $\mathfrak{T}_\sigma$. Donc $C^{\mathfrak{T}}_{2n+2}$ est dans $\mathfrak{T}_\sigma$.

Soit maintenant $A \in \mathfrak{T}_\sigma$, $A$ un ensemble $\Sigma^1_{2n+2}$. Il existe alors un entier $i$ tel que $\alpha \in A \leftrightarrow \exists \beta G(i, \alpha, \beta)$, et comme $A \in \mathfrak{T}_\sigma$, pour tout $\alpha \in A$, $\alpha \in C^{\mathfrak{T}}_{2n+2}$. Donc $C^{\mathfrak{T}}_{2n+2}$ est le plus grand $\Sigma^1_{2n+2}$ dans $\mathfrak{T}_\sigma$. □

THÉORÈME 3.14. *Nous gardons les mêmes hypothèses sur* $\mathfrak{T}$ *que dans le Théorème* 3.13. *Alors*

(i) $C^{\mathfrak{T}}_1 = \{\alpha, \exists \beta \in (\mathrm{seq}\ \omega)^\omega \cap L_{\omega_1^\alpha}\ \Phi(\alpha\beta)\}$ *est le plus grand* $\Pi^1_1$ $\mathfrak{T}$*-mince.*

(ii) *Si* $\aleph_1^L < \aleph_1$, *alors* $C^{\mathfrak{T}}_2 = \{\alpha, \exists \beta \in (\mathrm{seq}\ \omega)^\omega \cap L\ \Phi(\alpha, \beta)\}$ *est le plus grand* $\Sigma^1_2$ *dans* $\mathfrak{T}_\sigma$.

DÉMONSTRATION. La partie (ii) est une conséquence immédiate du Théorème 3.6(ii). Pour démontrer (i), nous allons adapter la démonstration de Kechris du cas $\mathfrak{T}_0$ (cf. [4, Théorème 2.A-1]).

Tout d'abord, le résultat 3.6(ii) peut être amélioré de la manière suivante: Soit $T$ un arbre sur $\omega \times \lambda$, et $A = p([T])$. Si $A$ ne contient aucun fermé $\mathfrak{T}$-parfait, alors pour tout $\alpha \in A$, il existe $\beta \in (\mathrm{seq}\ \omega)^\omega \cap T^+$ tel que $\Phi(\alpha, \beta)$, où $T^+$ est le plus petit ensemble admissible contenant $T$. La démonstration de ce résultat est analogue à celle de 3.6(ii), en utilisant l'absoluïté des jeux fermés.

Supposons que $A$ est $\mathfrak{T}$-mince et $\Pi^1_1$. Nous voulons prouver que $A \subset C^{\mathfrak{T}}_1$.

Puisque $A$ est $\Pi_1^1$, il existe un arbre récursif $T$ sur $\omega \times \omega$ tel que $\alpha \in A \leftrightarrow T(\alpha)$ est bien fondé.

Soit $\alpha \in A$, et $\xi = |T(\alpha)|$. Comme $T(\alpha)$ est récursif en $\alpha$, $\xi < \omega_1^\alpha$. Posons $A' = \{ \beta \in A, |T(\beta)| < \xi\}$. Comme $A' \subset A$, $A'$ est $\mathcal{T}$-mince. De plus $\alpha \in A'$.

Soit $T'$ un arbre sur $\omega \times \xi$, $T' \in L_{\omega_1^\alpha}$ tel que $A' = p([T'])$. D'après le fait énoncé plus haut, il existe donc $\beta \in (\text{seq } \omega)^\omega \cap (T')^+$ tel que $\Phi(\alpha, \beta)$. Mais comme $T' \in L_{\omega_1^\alpha}$, $(T')^+ \subset L_{\omega_1^\alpha}$, donc $\beta \in L_{\omega_1^\alpha}$ et $\alpha \in C_1^{\mathcal{T}}$.

Réciproquement, nous devons montrer que $C_1^{\mathcal{T}}$ est $\Pi_1^1$ et $\mathcal{T}$-mince.

$$\alpha \in C_1^{\mathcal{T}} \leftrightarrow \exists \beta \in \Delta_1^1(\alpha)\, \exists \gamma \in \Delta_1^1(\alpha)\, \big[\gamma \in WO \wedge \beta \in (\text{seq } \omega)^\omega \cap L_{|\gamma|} \wedge \Phi(\alpha, \beta)\big]$$

est un ensemble $\Pi_1^1$ d'après le théorème de Kleene.

Supposons que $C_1^{\mathcal{T}}$ contienne un fermé $\mathcal{T}$-parfait $P$, et soit $\alpha_0$ un code pour $P$. Alors la relation $\alpha \leqslant \beta \leftrightarrow \alpha \in P \wedge \beta \in P \wedge \omega_1^\alpha \leqslant \omega_1^\beta$ est un pré-bon ordre $\Sigma_1^1(\alpha_0)$ sur $P$, et pour tout $\alpha \in P$ $\{ \beta\ \beta < \alpha\} \subset \bigcup_{\gamma \in \Delta_1^1(\alpha)} F_\gamma$ est dans $\mathcal{T}_\sigma$, puisque $\{\gamma, \gamma \in \Delta_1^1(\alpha)\}$ est dénombrable. D'après la Proposition 3.11, $P$ est donc $\mathcal{T}$-mince, ce qui est contradictoire. Donc $C_1^{\mathcal{T}}$ est $\mathcal{T}$-mince et le théorème est démontré. $\square$

Les résultats qui précèdent sont établis moyennant l'axiome D. P. de détermination projective. Nous allons maintenant terminer cette section en établissant les résultats correspondants dans les modèles de Lévy-Solovay. Le fait que les résultats du §2 permettent de répondre à ce problème a été noté par K. Mc Aloon, dans le cas de l'idéal $\mathcal{T}_0$. Le résultat général s'en déduit facilement.

THÉORÈME 3.15. *Soit $\mathfrak{M}$ un modèle de $ZF + V = L$, $\Omega$ inaccessible dans $\mathfrak{M}$, et $\mathfrak{N}$ le modèle de Levy construit au dessus de $\mathfrak{M}$. Soit $\mathcal{T}$ un idéal de fermés paramétrés (avec une relation $\Phi$ qui est $\Pi_1^0$) de $\mathfrak{N}$. $\mathfrak{N} \models$ l'ensemble $C_2^{\mathcal{T}} = \{\alpha, \exists \beta \in L\ \Phi(\alpha, \beta)\}$ est le plus grand ensemble définissable en termes d'ordinaux qui est élément de $\mathcal{T}_\sigma$.*

*Par suite, comme $C_2^{\mathcal{T}}$ est un ensemble $\Sigma_2^1$, $C_2^{\mathcal{T}}$ est le plus grand élément de $\Sigma_n^1 \cap \mathcal{T}_\sigma$, pour tout $n \geqslant 2$.*

DÉMONSTRATION. It suffit de revenir à la Démonstration 2.4: Nous y avons montré qui si un ensemble $A$, définissable en termes d'ordinaux, n'est pas contenu dans $C_2^{\mathcal{T}}$, alors il contient un ensemble $B$ analytique et qui n'est pas dans $\mathcal{T}_\sigma$ (on utilise évidemment $L^{\mathfrak{N}} = \mathfrak{M}$). Ceci montre que $C_2^{\mathcal{T}}$ contient tous les ensembles de $\mathcal{T}_\sigma$ définissables en termes d'ordinaux. Comme la relation $\beta \in L \cap \omega^\omega$ est $\Sigma_2^1$, $C_2^{\mathcal{T}}$ est un ensemble $\Sigma_2^1$. Enfin $C_2^{\mathcal{T}} \in \mathcal{T}_\sigma$ puisque $|\omega^\omega \cap L| = \aleph_0$ dans $\mathfrak{N}$. $\square$

REMARQUES 3.16. (i) Un résultat analogue peut être obtenu en partant d'un modèle $\mathfrak{M}'$ satisfaisant $V = L[O^\#]$. Dans le modèle de Lévy correspondant, le plus grand élément de $\Sigma_2^1 \cap \mathcal{T}_\sigma$ est encore $C_2^{\mathcal{T}}$ (cf. Théorème 3.14(ii)), et pour tout $n \geqslant 3$, $C_n^{\mathcal{T}} = C_3^{\mathcal{T}} = \{\alpha, \exists \beta \in L[O^\#]\ \Phi(\alpha, \beta)\}$ est le plus grand élément de $\Sigma_n^1 \cap \mathfrak{I}_\sigma$. Il suffit de remarquer que la relation $\beta \in L[O^\#] \cap \omega^\omega$ est $\Sigma_3^1$.

(ii) Le résultat du Théorème 3.15 est applicable, en particulier, à l'idéal $\mathfrak{I}_1$ des fermés rares de $\omega^\omega$. Cependant la méthode de Kechris [**4**, Théorème 1. A-2] est également applicable pour cet idéal, ainsi que pour l'idéal $\mathcal{J}$ des ensembles de mesure de Lebesgue nulle qui ne vérifie pas les hypothèses du Théorème 3.15. En effet il est possible d'appliquer le Théorème 1.A-2 de [**4**], car lorsque $\mathfrak{M} \models V = L$, alors dans $\mathfrak{N}$ les classes $\Sigma_n^1$, $n \geqslant 2$, sont normées. De plus la relation $\mathfrak{M}_{\mathcal{J}}^n(\alpha) \leftrightarrow \omega^\omega - G(\alpha)$ est de mesure nulle, où $G$ est un $\Sigma_n^1$ universel pour les sous-ensembles $\mathbf{\Sigma}_n^1$ de $\omega^\omega$, est une relation $\Sigma_n^1$ (ceci peut-être démontré, par exemple, en utilisant le fait que chaque ensemble $\mathbf{\Sigma}_n^1$ de $\omega^\omega \times \omega^\omega$ est uniformisable, $\mu$ presque partout, par une fonction borélienne [**13**, Théorème 2]). Enfin l'analogue de la Proposition 3.11 est clair, puisque les ensembles $\Sigma_n^1$ ont la propriété de Baire dans $\mathfrak{N}$. Donc il existe aussi dans $\mathfrak{N}$, pour tout $n \geqslant 2$, un plus grand ensemble $C_n^{\mathcal{J}}$ qui est $\Sigma_n^1$ et de mesure nulle. Par contre nous ne savons pas si pour cet idéal $\mathcal{J}$ on a encore, pour $n \geqslant 2$, $C_n^{\mathcal{J}} = C_2^{\mathcal{J}}$.

(iii) L'idée d'introduire des jeux asymétriques où l'un des joueurs impose une règle à l'autre a été utilisée indépendamment par A. S. Kechris [**6**, §6] pour généraliser son travail sur les ensembles $K_\sigma$-bornés, mais de manière duale de la nôtre: Dans les jeux de Kechris, c'est le second joueur qui impose la règle au premier. Il est possible d'associer également un idéal de fermés à de tels jeux. Nous renvoyons le lecteur à l'article cité de Kechris pour plus de précisions concernant ces jeux.

Il ne semble pas qu'en toute généralité ces deux méthodes recouvrent les mêmes cas d'application. C'est cependant le cas pour certains idéaux particuliers–incluant l'idéal des fermés compacts–et dans ce cas il est possible de préciser la dualité. Supposons que la régle $\mathfrak{R}$ soit du type particulier suivant: $\mathcal{Q}$ est une famille de parties de $\omega$, et pour chaque $s \in \operatorname{Seq}\omega$, $A \in \mathcal{Q}$, on considère l'arbre bien-fondé $R_{s,A} = \{t,\ t \prec s \vee t = s^\frown n,\ n \in A\}$. Soit $\mathfrak{R} = \{R_{s,A},\ s \in \operatorname{Seq}\omega,\ A \in \mathcal{Q}\}$ et $\mathfrak{I}_{\mathfrak{R}}$ l'idéal de fermés associé. Il est alors possible d'associer à l'idéal $\mathfrak{I}_{\mathfrak{R}}$ un jeu de Kechris, et la règle correspondante (pour le second joueur) est la famille duale $\mathcal{Q}^*$ de la famille $\mathcal{Q}$, définie par $\mathcal{Q}^* = \{X \subset \omega,\ \forall A \in \mathcal{Q}\ X \cap A \neq \varnothing\}$.

## 4. Applications.

A. *Le cas fondamental* $\mathfrak{I}_0$. L'idéal $\mathfrak{I}_0$ des fermés réduits à un point nous a servi de modèle tout au long de l'étude générale. La seule chose que nous n'avons pas encore vérifiée est que l'idéal $\mathfrak{I}_0$ est de type bien fondé, donc qu'on peut lui appliquer les résultats du §3. Ceci va nous permettre de faire le lien entre les jeux introduits précédemment et les jeux $G_2^*$.

PROPOSITION 4.1. *L'idéal* $\mathfrak{I}_0$ *est de type bien fondé. Plus précisément, si on définit pour chaque entier* $n = \langle s, n_0, n_1\rangle$ *codant* (*récursivement*) $s \in \operatorname{Seq}\omega$, $n_0$ *et* $n_1 \in \omega$, $n_0 \neq n_1$,

$$R_{\langle s, n_0, n_1 \rangle} = \{t \in \text{seq } \omega,\, t < s \vee t = s^\frown n_0 \vee t = s^\frown n_1\},$$

*alors*

$$\mathfrak{R} = \{R_{\langle s, n_0, n_1 \rangle}, s \in \text{Seq } \omega, n_0, n_1 \in \omega\} \textit{ est un règle pour } \mathfrak{T}_0.$$

La démonstration de ce fait est triviale. Il faut remarquer que la méthode classique consiste à étudier l'idéal $\mathfrak{T}_0$ sur $2^\omega$, pour lequel on a à sa disposition les jeux $G_2^*$, puis à en déduire les résultats sur $\omega^\omega$ par plongement. Notre technique évite ce détour.

D'autre part si on restreint $\mathfrak{T}_0$ à $P = 2^\omega$, donc en utilisant la régle $\mathfrak{R}' = \{R_{\langle s,0,1 \rangle}, s \in \text{seq } 2\}$, on peut vérifier directement que les jeux $G^{\mathfrak{T}_0}$ et $G_2^*$ sont équivalents: Il suffit de remarquer qu'il est toujours possible, pour le joueur I, de jouer un entier $\langle s, 0, 1 \rangle$ un nombre (fini) suffisant de fois consécutivement pour que le joueur II soit obligé d'avoir construit $s^\frown 0$ ou $s^\frown 1$. Le résultat se déduit facilement de cette remarque.

La même remarque permet de rattacher l'étude des jeux $G_\omega^*$ à ce qui a été fait dans les sections précédentes:

B. *Les jeux $G_\omega^*$.*

DÉFINITION 4.2. Un fermé $F$ de $\omega^\omega$ est dit *troué* si l'arbre $T_F$ associé vérifie $\forall s \in T_F, \exists n\, s^\frown n \notin T_F$. Nous noterons $\mathfrak{T}_2$ l'idéal des fermés troués.

Nous utilisons ici la terminologie introduite dans la note [9], dans laquelle les résultats qui suivent sont annoncés.

Dans cette note, les fermés $\mathfrak{T}_2$-parfaits sont appelés hyperparfaits. Ce sont les fermés $F$ tels que l'arbre $T_F$ associé vérifie

$$\forall s \in T_F\, \exists s' > s\, \forall n\, s'^\frown n \in T_F.$$

LEMME 4.3. (i) *L'idéal $\mathfrak{T}_2$ est un idéal propre de type bien fondé de fermés de $\omega^\omega$. Plus précisément, en définissant, pour $s \in$ Seq $\omega$, $R_s = \{t, t \prec s \vee t = s^\frown n, n \in \omega\}$, alors $\mathfrak{R} = \{R_s, s \in \text{Seq } \omega\}$ est une règle pour $\mathfrak{T}_2$.*

(ii) *Pour tout sous ensemble $A$ de $\omega^\omega$, le jeu $G^{\mathfrak{T}_2}(A)$ est équivalent au jeu $G_\omega^*(A)$. Par suite, la détermination du jeu $G_\omega^*(A)$ équivaut à la $\mathfrak{T}_2$-régularité de $A$.*

DÉMONSTRATION. (i) Chaque $R_s$ est bien fondé. Soit $F$ un fermé troué. D'après la Définition 4.2, $\forall s \in T_F$, $R_s \not\subset T_F$. D'autre part si $\forall s\, R_s \not\subset T_F$, $F$ est clairement troué.

(ii) Dans le jeu $G_\omega^*$, I joue une suite $s$ et II répond par un entier $n$ à chaque coup. Ils construisent ainsi une suite $s^\frown n$. Dans le jeu $G^{\mathfrak{T}_2}$, II semble avoir plus de possibilités: Quand I joue une suite $s$, II peut choisir dans $R_s$ son jeu, donc jouer $s' \prec s$. Mais comme II doit jouer $s' \neq \varnothing$, I a la possibilité, en jouant successivement $s$ un nombre fini ($\leqslant |s|$) de fois, d'obliger II à avoir construit $s^\frown n$. Les deux jeux sont donc équivalents.

Nous pouvons donc appliquer le Théorème 3.6: La détermination du jeu $G_\omega^*(A)$ équivaut à la $\mathfrak{T}_2$-régularité de $A$. □

Ce lemme nous permet d'appliquer les résultats des sections précédentes que nous rassemblons dans le théorème suivant, qui répond en particulier au problème de D. Martin:

THÉORÈME 4.4. (i) $\mathrm{Det}^*_\omega(\mathbf{\Sigma}^1_1)$;

(ii) *Si* $\forall\alpha\ \aleph_1^{L[\alpha]} < \aleph_1$, *alors* $\mathrm{Det}^*_\omega(\mathbf{\Sigma}^1_2)$;

(iii) $\mathrm{Det}(\mathbf{\Delta}^1_{2n}) \to \mathrm{Det}^*_\omega(\mathbf{\Sigma}^1_{2n+1})$;

(iv) *Dans le modèle de Lévy-Solovay*, $AD^*_\omega$ *est vrai.*

C. *Ensembles* $K_\sigma$*-bornés*. La notion d'ensemble $K_\sigma$-borné est due à Kechris (cf. [6], où elle est notée "$\sigma$-boundedness"). Les résultats concernant cette notion sont dûs principalement à Kechris, et de façon indépendante, à Saint-Raymond [11] pour les résultats concernant les ensembles analytiques. Le résultat d'approximation dans le modèle de Lévy-Solovay et des applications à l'étude des filtres sur $\omega$ se trouvent dans [8].

Soit $\mathfrak{I}_3$ l'idéal des ensembles compacts de $\omega^\omega$. Un ensemble $A \subset \omega^\omega$ est dit $K_\sigma$-borné si $A$ est contenu dans un ensemble $K_\sigma$ de $\omega^\omega$, c'est-à-dire si $A \in (\mathfrak{I}_3)_\sigma$. Un fermé $\mathfrak{I}_3$-parfait est appelé superparfait dans [6].

Soit $\leqslant$ la relation d'ordre sur $\omega^\omega$ définie par $\alpha \leqslant \beta \leftrightarrow \forall n\ \alpha(n) \leqslant \beta(n)$.

Il est facile de vérifier qu'un fermé $F$ de $\omega^\omega$ est compact si et seulement si il existe un élément $\alpha_0$ de $\omega^\omega$ qui majore, pour l'ordre $\leqslant$, tous les éléments de $F$. En d'autres termes la relation $\Pi^0_1 \leqslant$ paramétrise l'idéal $\mathfrak{I}_3$.

Il est d'autre part bien connu que tout compact de $\omega^\omega$ est rare. Par suite, $\mathfrak{I}_3$ est un idéal de fermés propre et paramétré. Par contre, il est beaucoup moins aisé de voir que nous pouvons appliquer les résultats du §3.

Pour cela, identifions $\omega^\omega$ avec le sous-ensemble $\Pi^0_2\ A_0$ de $2^\omega$ des fonctions de $\omega$ dans $\{0, 1\}$ prenant une infinité de fois la valeur 1, par l'application récursive $\theta$ qui a chaque $\alpha \in \omega^\omega$ associe $\theta(\alpha)$ définie par

$$\theta(\alpha)(n) = 1 \leftrightarrow \exists k\ n = \sum_{i<k} (\alpha(i) + 1) - 1.$$

$A_0$ est un $G_\delta$ du compact $P = 2^\omega$, et l'ensemble $P - A_0$ est dénombrable, et peut être aisément énuméré récursivement par $(\alpha_n)_{n\in\omega}$.

Notons toujours $\mathfrak{I}_3$ l'idéal des compacts de $A_0$. Un fermé $F$ de $A_0$ est compact si et seulement si il est fermé dans $\omega^\omega$, c'est-à-dire si et seulement si son adhérence $\bar{F}$ dans $\omega^\omega$ ne rencontre pas $P - A_0$. Posons, pour tout $n \in \omega$, $R_n = T_{\{\alpha_n\}}$, et soit $\mathfrak{R} = \{R_n, n \in \omega\}$. D'après ce qui précède,

(i) $\forall n [R_n] \cap A_0 = \varnothing$.

(ii) si $F$ est fermé dans $A_0$, alors $F \in \mathfrak{I}_3 \leftrightarrow \forall n R_n \not\subset T_F$.

Ceci exprime exactement (cf. Remarque 3.8) que l'idéal $\mathfrak{I}_3$ de fermés de $A_0$ est de type bien fondé avec règle $\mathfrak{R}$.

Nous pouvons donc appliquer les résultats du §3, que nous résumons dans le théorème suivant:

THÉORÈME 4.5. (i) (*Kechris, Saint-Raymond*). *Tout ensemble analytique de* $\omega^\omega$ *est* $\mathfrak{I}_3$*-régulier* (*i.e. est* $K_\sigma$*-borné ou contient un superparfait*).

(ii) (*Kechris*) *Si* $\forall\alpha\ \aleph_1^{L[\alpha]} < \aleph_1$, *tout* $\mathbf{\Sigma}^1_2$ *est* $\mathfrak{I}_3$*-régulier.*

(iii) (*Kechris*) $\mathrm{Det}(\mathbf{\Delta}^1_{2n}) \to$ *Tout* $\mathbf{\Sigma}^1_{2n+1}$ *est* $\mathfrak{I}_3$*-régulier.*

(iv) (*cf.* [8]). *Dans le modèle de Lévy-Solovay, tout sous ensemble de* $\omega^\omega$ *est* $\mathfrak{I}_3$*-régulier.*

D. *Limites de la théorie générale.* La théorie générale que nous venons d'exposer semble indiquer une analogie très complète entre les différentes notions de petitesse liées à des idéaux de fermés de type bien fondé.

Nous allons terminer cet article en montrant les limites de cette analogie. Les résultats qui suivent sont a priori assez étonnant puisqu'ils vont montrer que la force des énoncés de $\mathfrak{I}$-régularité peut beaucoup varier avec l'idéal $\mathfrak{I}$ envisagé: Plus précisément nous allons prouver que l'énoncé "tout $\mathbf{\Sigma}_2^1$ est $\mathfrak{I}$-régulier" est équiconsistante avec l'existence d'un cardinal inaccessible lorsque $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_0$ ou $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_2$ tandis que sa consistance se déduit de celle de ZF lorsque $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_3$. Il s'agit donc là d'une différence tout à fait essentielle. En particulier, cela a donc un sens de poser le problème de la $\mathfrak{I}_3$-régularité de tous les ensembles dans un modèle construit sans utiliser l'existence d'un cardinal inaccessible, comme pour la mesurabilité ou la propriété de Baire.

Rappelons tout d'abord un résultat de Solovay [**12**]:

THÉORÈME 4.6 (SOLOVAY). *Les assertions suivantes sont équivalentes*

(i) *L'axiome H*: $\forall \alpha \aleph_1^{L[\alpha]} < \aleph_1$.

(ii) *Tout* $\mathbf{\Pi}_1^1$ *est* $\mathfrak{I}_0$-*régulier* (*i.e est dénombrable ou contient un parfait*).

(iii) *Tout* $\mathbf{\Sigma}_2^1$ *est* $\mathfrak{I}_0$-*régulier.*

Les implications (i) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (ii) peuvent être déduites du Théorème 3.6(ii). L'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) se démontre en construisant dans $L[\alpha]$ un $\Pi_1^1(\alpha)$ indénombrable et ne contenant pas de parfait, et en utilisant des arguments d'absoluïté.

On peut ajouter, à la liste précédente d'assertions équivalentes, les deux assertions suivantes:

(iv) $\mathrm{Det}_\omega^*(\mathbf{\Pi}_1^1)$,

(v) $\mathrm{Det}_\omega^*(\mathbf{\Sigma}_2^1)$.

Il suffit pour cela de remarquer que $H \rightarrow (v)$ est l'assertion (ii) du Théorème 4.4, et d'autre part que l'on a clairement $\mathrm{Det}_\omega^*(\mathbf{\Pi}_1^1) \rightarrow \mathrm{Det}_2^*(\mathbf{\Pi}_1^1)$.

Ceci montre la force de l'assertion "tout $\mathbf{\Sigma}_2^1$ est $\mathfrak{I}$-régulier", pour $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_0$ et $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_2$: on ne peut pas démontrer leur consistance relativement à celle de ZF.

Le résultat est, comme nous l'avons dit, très différent dans le cas de l'idéal $\mathfrak{I}_3$: On a bien, d'après le Théorème 4.5(ii), l'implication $H \rightarrow$ tout $\mathbf{\Sigma}_2^1$ est $\mathfrak{I}_3$-régulier. D'autre part, il est facile de construire, dans $L$, un $\Pi_1^1$ non $\mathfrak{I}_3$-régulier (il est même possible de construire un $\Pi_1^1$ $\mathfrak{I}_3$-mince et cofinal à $\omega^\omega$ pour l'ordre $\leqslant'$ défini par $\alpha \leqslant' \beta \leftrightarrow \exists n_0 \forall n \geqslant n_0\ \alpha(n) \leqslant \beta(n)$). Cependant, les considérations d'absoluïté ne donnent rien, et on a par contre le résultat suivant, qui montre que Cons(ZF) $\rightarrow$ Cons(ZF + AC + tout $\mathbf{\Sigma}_2^1$ est $\mathfrak{I}_3$-régulier).

THÉORÈME 4.7. *Supposons* $MA(\aleph_1)$. *Le* $\sigma$-*idéal* $(\mathfrak{I}_3)_\sigma$ *est* $\aleph_1$-*additif* (*i.e. toute union de* $\aleph_1$ *ensembles de* $(\mathfrak{I}_3)_\sigma$ *est dans* $(\mathfrak{I}_3)_\sigma$). *En particulier, tout ensemble* $\mathbf{\Sigma}_2^1$ *est* $\mathfrak{I}_3$-*régulier.*

Démonstration. La démonstration repose sur la conséquence suivante de $MA(\aleph_1)$:

( $*$ ) Tout sous-ensemble de cardinalité $\aleph_1$ de $\omega^\omega$ est majoré pour l'ordre $\leqslant '$. Admettons ce résultat. Si $A = \bigcup_{\xi<\aleph_1} A_\xi$, où chaque $A_\xi$ est élément de $(\mathfrak{I}_3)_\sigma$, définissons $\beta_\xi \in \omega^\omega$ tel que $\forall\alpha \in A_\xi$, $\alpha \leqslant '\beta_\xi$ (un tel $\beta_\xi$ est facile à trouver: chaque $A_\xi$ est dans $(\mathfrak{I}_3)_\sigma$, donc il existe une suite $(\beta_n)_{n\in\omega}$ telle que $\forall\alpha \in A_\xi$, $\exists n$ $\alpha \leqslant \beta_n$. On prend alors $\beta_\xi(n) = \sup_{m<n} \beta_m(n)$). Par suite il existe $\beta$ telle que $\forall\alpha \in A$, $\alpha \leqslant '\beta$. Mais ceci implique clairement que $A$ est contenu dans un $K_\sigma$ de $\omega^\omega$. La démonstration de ($*$) utilise une technique tout à fait classique: Soit $A$ de cardinalité $\aleph_1$, $A \subset \omega^\omega$. On définit un ensemble ordonné $(P, \leqslant_P)$ de la manière suivante: une condition $p$ de $P$ est un couple formé d'une suite finie d'entiers et d'un sous-ensemble fini $I$ de $A$. On définit $(s, I) \leqslant_P (s', I')$ par $I' \subset I$, $s' < s$, et $\forall n \in \operatorname{dom} s - \operatorname{dom} s'$, $\forall\alpha \in I'$, $s(n) > \alpha(n)$. $P$ a la condition d'antichaîne dénombrable puisque si $(s, I)$ et $(s', I')$ sont incompatibles, nécessairement $s \neq s'$. Définissons, pour $n \in \omega$, $D_n = \{(s, I) \in P,\ n \in \operatorname{dom} s\}$, et $D_\alpha = \{(s, I), \alpha \in I\}$ pour $\alpha \in A$. L'ensemble $\mathfrak{D} = \{D_n, n \in \omega\} \cup \{D_\alpha, \alpha \in A\}$ est de cardinalité $\aleph_1$, et tous ses éléments sont denses. Soit alors $G$ $\mathfrak{D}$-générique sur $P$. $\alpha_0 = UG$ est une fonction de $\omega$ dans $\omega$, puisque $G$ rencontre chaque $D_n$, et pour chaque $\alpha \in A$, puisque $G$ rencontre $D_\alpha$, il existe $(s, I) \in G$ tel que $\alpha \in I$, donc $\forall n \geqslant |s|$, $\alpha(n) \leqslant \alpha_0(n)$. ($*$) est démontré.

Enfin pour démontrer que tout $\mathbf{\Sigma}^1_2$ est $\mathfrak{I}_3$-régulier, on peut soit utiliser le fait que tout $\mathbf{\Sigma}^1_2$ $A$ est union de $\aleph_1$ boréliens, donc que si $A$ ne contient aucun $\mathfrak{I}_3$-parfait, ces boréliens sont $\mathfrak{I}_3$-minces, donc dans $(\mathfrak{I}_3)_\sigma$, et utiliser ce qui précède, ou bien utiliser le Théorème 4.5(ii), en remarquant que $\forall\alpha$ $\operatorname{card}(\omega^\omega \cap L[\alpha]) \leqslant \aleph_1$, et ce qui précède. □

*Problème* 4.8. Nous venons de voir que la $\mathfrak{I}_0$-régularité des ensembles $\mathbf{\Sigma}^1_2$ est équivalente à l'axiome H, donc implique la $\mathfrak{I}$-régularité des $\mathbf{\Sigma}^1_2$ pour tout idéal $\mathfrak{I}$ de type bien fondé.

En est-il de même lorsqu'on remplace $\mathbf{\Sigma}^1_2$ par un autre classe "raisonnable" de sous-ensembles de $\omega^\omega$? En particulier pour $\mathfrak{P}(\omega^\omega)$?

Plus généralement, peut-on trouver, pour une classe raisonnable $\Gamma$, un idéal $\mathfrak{I}$ de fermés de type bien fondé tel que la $\mathfrak{I}$-régularité des ensembles de $\Gamma$ implique la $\mathfrak{I}'$-régularité de ces ensembles, pour tout autre $\mathfrak{I}'$ de type bien fondé?

Nous ne savons même pas si $\mathrm{AD}^*_2$ équivaut à $\mathrm{AD}^*_\omega$. (Nous pouvons juste affirmer, d'après ce qui précède, que ces énoncés sont tous deux équiconsistants avec l'existence d'un cardinal inaccessible.)

## References

1. M. Davis, *Infinite games with perfect information*, Advances in game theory, Ann. of Math. Studies no. 52, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1964, pp. 85–101.

2. C. Dellacherie, *Capacités et processus stochastiques*, Ergebnisse der Math. Wissenschaften, Band 67, Springer-Verlag, Berlin, 1972.

3. A. S. Kechris, *Measure and category in effective descriptive set theory*, Ann. Math. Logic 5 (1973), 337–384.

4. ______, *The theory of countable analytical sets*, Trans. Amer. Math. Soc. **202** (1975), 259–299.

5. ______, *Descriptive set theory*, cours manuscrit en circulation.

6. ______, *On a notion of smallness for subsets of the Baire space*, Trans. Amer. Math. Soc. **229** (1977), 191–207.

7. E. M. Kleinberg, *Infinitary combinatorics*, Cambridge Summer School in Math. Logic 1971, Lecture Notes in Math., vol. 337, Springer-Verlag, Berlin, 1973.

8. A. Louveau, *Ensembles $K_\sigma$-bornés et filtres sur $\omega$*, Colloq. Internat. du C.N.R.S. (Paris) **249** (1978), 147–155.

9. ______, *Détermination des jeux du type $G^*_\omega$*, Note aux C. R. Acad. Sci. (Paris), Déc. 1975.

10. Y. Moschovakis, *Descriptive set theory*, North-Holland, Amsterdam (to appear).

11. J. Saint-Raymond, *Un théorème d'approximation par l'intérieur*, Note aux C. R. Acad. Sci. (Paris), Juin, 1975.

12. R. M. Solovay, *On the cardinality of $\Sigma^1_2$ sets of reals*, Foundations of Math. (Sympos. Commemorating the 60th birthday of K. Gödel, Columbus, Ohio, 1966), Springer, New York, 1966, pp. 58–73.

13. ______, *A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable*, Ann. of Math. (2) **92** (1970), 1–56.

Equipe d'Analyse, Université Paris VI, 4 Place Jussieu, 75230 Paris, France